

Math

林

29

Franklin

ix. 24

Athanasius
schmid.

Math. U

224

ELEMENTA
ARITHMETICES,
ET
GEOMETRIÆ

PHILOSOPHIÆ TYRONIBUS
ADCOMMODATA

A
JOAN. NEP. ZEILLER

IN CATHOLICO LYCÆO AD ÆDEM SANCTI SAL-
VATORIS AUGUSTÆ VINDELICORUM PROFES-
SORE PUBLICO, ORDINARIO.



CUM II. TABELLIS.

~~~~~  
*AUGUSTÆ VINDELICORUM,*  
SUMPTIBUS MATTHÆI RIEGER P.M. FILIORUM.

MDCCXC.



ARITHMETICES  
ELEMENTA

GEOMETRIAE

PHILOSOPHIAE  
ACCOMMODATA

JOHANNES KEPLER

IN AUSTRIAM VIENNA AD ACADEMIAM  
CAESAREAM AUSTRIAE VIENNAE  
ORDINARIO



CELESTIS TABULAE

LIBRARIUS  
SUMPTIBUS MATHIAE WILHELMI

Bayerische  
Staatsbibliothek  
München





## PRÆFATIO.

**M**ulta sunt, eaque præclara opera, queis Viri de re literaria summe meriti primas Matheſeos institutiones diſcentium commodo ſcripſere.

Verum pleraque eorum ita conſtituta ſunt, ut timidos, & præjudiciis, neſcio, quibus, nimium occupatos tyronum animos vel ipſa mole ſua in primo philoſophiæ limine nimium quantum perterreant.

Operæ pretium itaque me facturum putavi, ſi ea, quæ probatiſſimi authores pluribus pertractant, aut a me ex parte cogitata ſunt, in compendium redigerem, omiſſis potiſſimum iis, quæ ad Phyſices ſtudium vel minus neceſſaria, vel tyronum captui minus adcommodata videbantur.

Duas in partes opuſculum diſtribui; quarum prima *arithmetices vulgaris*, & *algebræ*: altera *geometriæ* principia (plura enim a philoſophiæ Tyronibus non exigēs) complectitur. Partem quamvis ſuas denuo



in sectiones, has in capita, paragraphos, numeros distinxī, ut sic discipulorum memoriæ facilius consuleretur.

Ceterum optandum sane, ut, quæ his paginis continentur, primo statim philosophiæ anno explanentur; tum, ne imparati ad pulcherrimum Physicæ studium ejusdem disciplinæ candidati accedant; tum etiam ob alias utilitates in omnem vitam redundaturas; quarum ego illam haud minimam duco, quod Disciplinæ Mathematicæ intellectum utilissime exerceant, atque habitum quemdam, seu facilitatem, ordinatim de rebus omnibus, & solide cogitandi, atque differendi in adolescentum animos inducant; quo quid utilius cogitari possit, non video.

Hæc præmittenda duxi. Vos vero, Auditores mei, in quorum gratiam hanc qualemcunque scriptiunculam publicæ lucis feci, eandem eo, quo facta est a me, animo recipite; si quæ fortassis in ea deesse videntur, illa quidem publicis in prælectionibus Professoris explicatio abunde compensabit. Valete!





CONSPECTUS  
MATERIARUM  
PARTIS I.

---

*Prolegomenon.*

*De objecto Matheſeos, & ejus methodo.*

Pag. I

PARS I.

*De Arithmetica.*

3

SECTIO I.

*De primis operationibus arithmetices.*

CAPUT I.

*De Natura, & valore Numerorum.*

4

CAPUT II.

*De operationibus arithmeticis quoad numeros  
integros, & homogeneos.*

8

§. 1. De Additione.

10

§. 2. De Subtractione.

11

§. 3. De Multiplicatione.

14

§. 4. De Divisione.

18

\* 3

CAPUT



## CAPUT III.

*De operationibus arithmeticiis in numeris integris, & heterogeneis.* Pag. 25

- §. 1. Variæ dimensionum species. 25  
 §. 2. De reductione numerorum heterogeneorum. 26  
 §. 3. De eorundem additione, subtractione, multiplicatione, divisione. 28
- 

## SECTIO II.

*De primis operationibus algebrae circa quantitates integras.*

## CAPUT I.

*Notiones praeviae.* 32

## CAPUT II.

*De reductione, additione, subtractione quantitatum algebraicarum.*

- §. 1. De Reductione. 37  
 §. 2. De Additione. 38  
 §. 3. De Subtractione. 39

## CAPUT III.

*De multiplicatione, & divisione algebraica.*

- §. 1. De Multiplicatione. 40  
 §. 2. De Divisione. 42



---

SECTIO III.

*Theoria fractionum.*

CAPUT I.

*De fractionibus communibus.*

- §. 1. De valore, & comparatione fractionum. Pag. 47
- §. 2. De reductione fractionum. 53
- §. 3. De operationibus fractionum. 59

CAPUT II.

- De fractionibus decimalibus.* 65
- §. 1. De natura, & valore decimalium. 66
- §. 2. De operationibus decimalium. 68
- §. 3. De reductione fractionum communium ad decimales, & vicissim. 72
- 

SECTIO IV.

*De Potentiis, & Radicibus quantitatuum.*

CAPUT I.

- De natura, & genesi potentiatarum.* 75



## CAPUT II.

*De Radicibus.*

- §. 1. De extractione radicum e quantitati-  
bus algebraicis. Pag. 80
- §. 2. De extractione radicum ex numeris. 87

## SECTIO V.

*De Analyfi, seu Problematum resolutione.*

## CAPUT I.

*De Resolutione Problematum primi gradus.*

- §. 1. Notiones præviæ. 91
- §. 2. De operationibus ad resolutionem pro-  
blematis primi gradus cum una inco-  
gnita requisitis. 93
- §. 3. Methodus resolvendi problemata pri-  
mi gradus cum una incognita. 100
- §. 4. De resolutione problematum primi gra-  
dus cum pluribus incognitis. 105
- resolutione problematum secundi  
gradus. 112



## SECTIO VI.

### *De comparatione quantitatum.*

#### CAPUT I.

*Notiones præviæ.*

Pag. 118

#### CAPUT II.

*De ratione, proportionē, & progressionē arithmetica.*

§. 1. De ratione & proportionē arithmetica. 121

§. 2. De progressionē arithmetica. 122

#### CAPUT III.

*De ratione, proportionē, & progressionē geometrica.*

§. 1. De ratione geometrica. 126

§. 2. De proportionē geometrica. 129

§. 3. De æqualitate geometrica. 133

§. 4. Adplicatio theoriæ de proportionibus geometricis. 138

§. 5. De progressionibus geometricis. 145



---

**SECTIO VII.***De Logarithmis.***CAPUT I.***De natura, & canone logarithmorum.*

§. 1. De natura Logarithmorum. Pag. 149

§. 2. De Canone Logarithmorum. 154

**CAPUT II.***De usu Logarithmorum.*

§. 1. Dato numero invenire Logarithmum. 156

§. 2. Dato Logarithmo invenire numerum  
respondentem. 161

---

**SECTIO ULTIMA.***De proprietatibus magnitudinis, si spe-  
ctatur ut infinita.***CAPUT I.**

*Notiones præviæ.* 167

**CAPUT II.**

*De proprietatibus infinitorum, eorumque ad  
finita comparatione.* 169



---

P A R S II.

COMPLECTENS

ELEMENTA GEOMETRIÆ.

---

*Prolegomenon.*

SECTIO I.

*De Lineis.*

CAPUT I.

*Notiones præviæ.*

Pag. 180

CAPUT II.

*De lineis rectis, quæ spatium non claudunt.* 184

§. 1. De rectis in aliquo puncto concurren-  
tibus, 185

§. 2. De lineis parallelis. 186

CAPUT III.

*De lineis rectis, quæ spatium claudunt.* 189

§. 1. De triangulis. *ibid.*

§. 2. De quadrilateris. 196

§. 3. De aliis polygonorum classibus. 198

CAPUT



## CAPUT IV.

*De lineis, & angulis ad circulum relatis.* Pag. 201

## CAPUT V.

*De proportionibus linearum.*

§. 1. De proportionibus linearum in triangulis 206

§. 2. De proportionibus linearum in polygonis similibus. 211

§. 3. De proportionibus in lineis ad circulum relatis. 213

## CAPUT VI.

*Problemata geometrica.* 214

## SECTIO II.

*De Superficiebus.* 220

## CAPUT I.

*De genesi, & proprietatibus planorum.* 221

## CAPUT II.

*De dimensionibus planorum.* 223

## CAPUT III.

*De comparatione planorum.* 231

## SECTIO



---

SECTIO III.

*De Solidis.*

Pag. 233

CAPUT I.

*Descriptio variorum solidorum.*

234

CAPUT II.

*De dimensione, & comparatione solidorum.*

§. 1. De dimensione, & comparatione, spectando eorum soliditatem.

238

§. 2. Spectando solidorum superficiem.

244

---

SECTIO IV.

*Principia Trigonometricæ planæ.*

249

CAPUT UNICUM.

*De functionibus angulorum.*

250

SECTIO



## SECTION V.

*De Sectionibus conicis.*

## CAPUT I.

*Genesis curvarum.*

Pag. 256

## CAPUT II.

*Punctorum, rectarumque in conicis notiones, &  
proprietas.*

260

## CAPUT III.

*De æquationibus ad curvas.*

266





**P A R S I.**

---

**COMPLECTENS  
ARITHMETICAM  
VULGAREM  
ET  
ALGEBRAM.**



P A R S I

---

COMPLECTENS

ARITHMETICAM

AUGUSTINUM

ET

ALGEBRAM





# PROLEGOMENON.

## NOTIONES PRÆVIÆ.

I.

**M***atheſeos* nomine omnis ſcientia venit, cujus objectum *magnitudo* eſt, vel *quantitas*. Unde *ſcientia quanti* adpellari ſolet. *Quantitas* vero id omne dicitur, quod partibus conſtat, & augmenti, aut decrementi capax eſt.

2. Porro, uti *quantitas* ſpectari poteſt compoſita ex partibus ſive diſcretis, ſive continuis, ita duplex *Matheſeos* ſpecies diſtinguitur, *Arithmetica* nempe, & *Geometria*; illa *quantitatem* e partibus ſeparatis, quas *numeris* exprimimus: hæc e continuis compoſitam quam *extenſum* dicimus & *lineis* designamus, objectum ſibi proprium conſtituit.

3. *Arithmetica* ergo, & *Geometria* univerſas *Mathematicas* diſciplinās complectuntur, *Aſtronomiam*, *Mechanicam*, *Opticam*.

*Zeiler Elementa.*

A

cam.

25

22

25

22

22

2

22



cam &c. quæ aliud nihil sunt, quam *arithmetices*, & *Geometricæ* ad peculiaria objecta adplicatio. Ex quo patet, quantus sit harum scientiarum usus, quanta necessitas homini, qui physicis disciplinis navare operam constituit.

4. *Methodus*, qua pertractari hæ scientiæ solent, *mathematica* aut *geometrica* dicitur, atque his capitibus absolvitur: primo ponit *definitiones*, queis vim verborum, rerumque naturam nitide, & præcise explicat: tum præmittit *axiomata*, hoc est, principia tam clara, ut eorum evidentiam nemo sanæ rationis in dubium vocare queat: aut *postulata*, queis rem factu tam facilem concedi nobis poscimus, ut negari non possit.

Ex his principiis deducuntur *Theoremata*, seu *Propositiones speculativæ*, quarum nexus necessarius cum iisdem luculento ratiocinio, quod *demonstrationem* dicunt, ostenditur.

Ex propositionibus jam demonstratis *Corollaria* eruuntur, seu veritates inde manifeste profluentes. Sequuntur *Problemata*, seu propositiones practicæ, & demonstrabiles, in quibus, fieri quidpiam, aut fieri debere, adferitur.

Interferuntur quandoque *Lemmata*, seu veritates, quarum demonstratio ideo solum præmittitur, ut sequentium propositionum evidentia inde deduci possit.

Deni-



Denique & *Scholia* adduntur, seu observationes quæpiam, queis aut obscura declarantur magis, aut usus doctrinæ indicatur, aut eruditio aliqua proponitur, aut Lector de re quacunque utiliter admonetur.

---

## PARS PRIMA.

### *Arithmetica.*

**A***rithmetica* nomen generale est, & quantitates discretas pertractat, seu numeris, seu literis exprimendas. Illa, quæ numeris utitur, & propterea *scientia numerorum* dicitur, *arithmetica vulgaris*, seu *arithmetica* per antonomasiam: quæ literis quantitates exprimit, *Algebra* adpellari consuevit. Hac parte de utraque ita agendum erit, ut in *prima Sectione* arithmetices vulgaris: in *secunda* Algebrae primas operationes circa quantitates integras tradituri simus. *Sectionio tertia* dabit Theoriam fractionum: *quarta* tractabit de potentiis, & radicibus quantitatum: *quinta* docebit analyfin, seu resolutionem problematum: *sexta* denique de variis quantitatum relationibus aget.

Ad finem per modum adpendicis duas Sectiones adferemus de Logarithmis, & proprietatibus infinitorum.



## S E C T I O I.

## DE PRIMIS OPERATIONIBUS ARITHMETICES.

## C A P U T I.

## DE NATURA, ET VALORE NUMERORUM.

5. Si quantitas in plures partes æquales divisa concipitur, & quæpiam pars solitarie spectatur, ea *unitas* dicitur. Sit gradus in sexaginta partes æquales, quas minuta dicimus, divisus; quodlibet minutum unitas erit. Dividatur circulus in trecentos sexaginta gradus: etiam gradus respectu circuli *unitatis* instar habetur.

6. Plurium ejusmodi unitatum collectio *Numerum* constituit. Numerus itaque unitatum collectio est. Cæterum ipsa unitas numerus habetur; quævis enim unitas in plures perpetuo, pluresque partes dividi, aut divisa concipi potest; quibuscum si comparetur, ipsa proprie numerus est.

7. Ut numerum quemlibet designare possimus, decem sequentibus characteribus, seu cifris utimur, 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. Prima nota *zerum*, seu *nihilum*: altera unitatem, tertia duas unitates, seu *binarium*, & sic porro, designant, ita, ut, excepto zero, valor characterum ex continua unitatis adjectione confurgat.

8. Nume-



8. Numeri isti, quos *simplices* vocamus, præter valorem, quem ex se, & sua institutione habent, alium insuper obtinent a loco, in quo existunt, si plures notæ inter sese connexæ juxta ponuntur. Valor hic, si progressus fiat a dextra sinistram versus, ita crescit, ut quævis nota decuplo plus valeat, quam valuisset, si in proximo dextram versus loco fuisset posita. E. g. 3 solitarie positum tres unitates, contra 30 jam tres decades, seu triginta unitates designat. Unde & illud consequitur, zerum, utut de se carentiam omnis quantitatis, seu nihilum repræsentet, illud tamen efficere, ut reliquis notis, queis adjungitur, valorem localem conservet. Numeros ejusmodi, qui pluribus, quam una nota, constant, *compositos* vocamus.

*Coroll.* Si numerus compositus in suas classes tribuitur, quarum singulis tres notæ respondent, a dextra sinistram versus incipiendo, excepta finissima, quæ etiam duas, aut unicam complecti notam potest: in prima classe erunt unitates, decades, centenarii *simplices*: in secunda unitates, decades, centenarii *Millenariorum* continebuntur, & sic porro; uti ex subjecta tabella patet.



|                                         |                                      |          |                |                    |          |            |         |          |            |         |          |
|-----------------------------------------|--------------------------------------|----------|----------------|--------------------|----------|------------|---------|----------|------------|---------|----------|
| 1 4 0 „ 8 7 3 . 4 5 6 , 1 2 9 . 7 3 2 . |                                      |          |                |                    |          |            |         |          |            |         |          |
| centenarii                              | decades                              | unitates | centenarii     | decades            | unitates | centenarii | decades | unitates | centenarii | decades | unitates |
| Billio-<br>num.                         | Millena-<br>riorum<br>millio-<br>num |          | Millio-<br>num | Millena-<br>riorum |          | simplices  |         |          |            |         |          |

Hinc facilis est resolutio fequentium problematum.

9. PROBLEMA I. *Numerum quemcunque compositum enunciare.*

RESOLUTIO. Dividatur numerus datus in fuas classes, cuivis tribuendo tres notas, a dextra finiftram verius; poft primam claffem fiat *punctum*: poft alteram *virgula* ducatur: poft tertiam denuo punctum: tum duæ virgulæ &c. ita, ut puncta cum virgulis alternent. 2do. Facta hac partitione numeri ternas duntaxat notas initio a finiftris facto feorfim enuncia, & ad finem illius adde *fpeciem*, ad quam pertinet claffis, & quam fignum adjectum denotat; fcilicet, dum duæ lineolæ occurrunt, dic *billiones*: ad fequens punctum adde *millia millionum*; ad unicam virgulam *milliones*: ad ultimum punctum *millia*; atque ita numerum quemvis rite pronuntiabis. Sic  
nume-



numerus supra positum ita proferes: 140 Billiones, 873 millia millionum, 456 milliones, 129 millia, 732.

*Schol.* Adjungo nonnulla exempla. Si Semidiameter telluris continet 19641762 ped. par. erit distantia lunæ ab eadem terra 1178505720 eiusmodi pedum. Si ponatur solis a tellure distantia 22000 semid. terræ: continebit eadem ad pedes reducta 432118764000. ped. Diameter orbitæ terrestris erit 864237528000 ped. Stellæ fixæ, quæ telluri proximæ censentur, intervallo distant majore, quam sit spatium 774000000000 mill. germ.

10. PROBLEMA II. *Numerum quemcunque propositum rite scribere.*

RESOLUTIO. 1mo. Statuantur tot classes, quot videntur contineri in proposito numero. 2do. Singuli characteres ad suas classes referantur: e. g. billiones, decades, aut centenarii billionum ad quintam, seu ante duas virgulas: centenarii, decades, unitates millenariorum millionum ad quartam, quæ secundum præcedit punctum &c. 3tio. Si una, aut altera classe nonnisi unitates, aut decades, aut centenarii enunciantur, reliquarum notarum ejusdem classis locum zeri impleant.

Sit scribendus sequens numerus: *viginti tres milliones, duo millia, sexcenta, & unum*; patet, hic nonnisi tres classes requiri: millionum nempe: millenariorum, & simplicium; scribantur ergo in classe tertia mil-



lionum nonnisi duæ notæ, nempe 23: in secunda classe millenariorum, quia nulli centenarii, nullæ decades enunciantur, scribantur solæ unitates; loco centenariorum, & decadam ponantur duo zeri; scilicet 002; denique in prima classe simplicium ponantur centenari, & unitates; seu scribatur 601: Numerus itaque supra enunciatus ita scribitur: 23,002.601. Eadem methodo sequentes quantitates numeris exprimes: Maxima distantia Saturni a sole continet *centum & nonaginta milliones supra octingenta, octo millia, & ducenta milliar. german.* Ejus orbita *mille, centum & viginti milliones, viginti septem millia, septingenta, octo, & quadraginta milliar. german.* complectitur.

## CAPUT II.

DE OPERATIONIBUS ARITHMETICIS QUOAD NUMEROS INTEGROS, ET HOMOGENEOS.

11. Numerum consideramus, vel ut *abstractum*, quatenus solam exprimit multitudinem, non item qualitatem partium: e. g. *tria, centum &c.* vel, ut *concretum*, qui præter multitudinem quoque speciem partium enunciat: e. g. *tria minuta, centum floreni &c.*

12. Concreti numeri inter se comparati aut homogenei sunt, aut heterogenei. *Homogenei* ad eandem speciem referuntur: e. g. *tres pedes, quinque pedes &c.* *Heterogenei* diversas



verfas continent species: e. g. *quatuor pedes, quinque digiti &c.* qui numeri heterogenei *reducibiles* vocantur, si ad unam, eandemque denominationem, aut speciem reduci possunt; ut hexapedæ, pedes, digiti, lineæ &c. sin minus: *irreducibiles* erunt; quales forent *duo gradus, sex pedes, duce horæ.* In præsens *de homogeneis* numeris: *de heterogeneis*, & reducibilibus vero proximo capite agendum erit.

13. Quoniam Mathematici quantitatem ea solum ratione spectant, qua augmenti, vel decrementi capax est: sequitur, *duplicis generis operationes in numeris posse institui, alteram, quæ augere illos: alteram, quæ eosdem iminuere certa ratione docet.* Prima *additio* generatim, secunda *subtractio* vocatur.

14. Si plures numeri homogenei in unam summam colliguntur, operatio simplici *additionis* vocabulo compellatur: si idem numerus aliquoties sibimet addendus fuerit, *Multiplicatio* dicitur. Pariter, si numerus alter ab altero una vice demitur, ut appareat, quantum alter altero major sit; hæc operandi methodus simplex *subtractio* nominatur: cum vero repetita subtractione opus est, ut videatur, quoties unus numerus in altero contineatur, *divisione* utimur. Quare omne genus operationum ad quatuor species reducuntur, scilicet *additionem, subtractionem, multiplicationem, divisionem*, quas totidem distinctis Sphis pertractabimus.



## §. I.

*De Additione.*

15. *Additio est duarum, vel plurium quantitatum homogenearum in unam summam collectio.*

16. PROBLEMA. *Addere numeros homogeneos compositos.*

*Resolutio.* 1. Scribe numerum alterum infra alterum hac lege, ut unitates infra unitates, decades infra decades, centenarii infra centenarios &c. positi singulas series verticales constituent; ad finem ducatur linea transversa.

2do. Initio a dextra, seu in serie unitatum facto, versusque sinistram progrediendo, collige summam primo unitatum, tum decadum &c. & has summas partiales infra lineam sub columna correspondente ponito.

3tio. Quando summa ex columna una collecta excedit numerum 9: sola dextima nota scribatur infra columnam correspondentem, altera sequenti classi addatur.

## EXEMPLA.

I. *Cajus testamento disposuit, ut hæreditas tres inter filios ita distribueretur, ut primo obtingerent*

{Secundo  
{Tertio

3450 flor.

2537

2012

*Quæritur, quanta sit tota hæreditas?*

Erit in dato casu *Summa*

7999 flor.

II. A



## *De primis operationibus Arithmetices. II*

|                                                      |                    |
|------------------------------------------------------|--------------------|
| II. A mundo condito usque ad diluvium fluxerunt anni | 1657.              |
| a diluvio usque ad exitum Israel ex ægypto           | 796.               |
| ab exitu ex ægypto usque ad primum Regem             | 422.               |
| ab hoc ad babylonicam captivitatem                   | 474.               |
| a captivitate babylonica usque ad christum natum     | 600.               |
| demum a christo nato usque ad præsens tempus         | 1789.              |
| <i>Quæ est ætas mundi? Erit Summa</i>                | <i>5738. anni.</i> |

17 *Demonstratio* operationis rite peractæ petitur ex evidenti principio: *Totum est æquale suis partibus simul sumtis.*

18. *Examen* vero additionis vel erit *subtractio*, quam mox sequenti Spho tractabimus: vel, si molestior illa fuerit, repetatur operatio, atque summa colligatur ex singulis columnis a suprema nota descendendo ad infimam. Si eadem prodit summa, concludi potest, rite peractam fuisse additionem.

### *§. 2.*

#### *De Subtractione.*

19. *Subtractio* est unius quantitatis ab altera homogenea ablatio, ut quantitas residua innotescat. Quantitas, a qua altera subtrahitur, *minuenda*: quæ tollitur ab altera, *subtrahenda*: illa denique, quæ facta subtractione remanet, *residuum*, vel *differentia*, *excessus* vocatur.



20 PROBLEMA. *Subtrahere numeros homogeneos compositos.*

*Resolutio.* imo. Scribatur minor numerus, id est, subtrahendus infra maiorem, scilicet minuendum eodem ordine, quem in additione præcepimus; tum ducatur linea transversa.

2do. Inchoetur subtractio ab unitatibus, tum progressus fiat ad decades &c. residuum unitatum, decadam &c. in respondente columna infra lineam scribatur.

3tio. Si in ferie aliqua numerus cum minuendus, tum subtrahendus idem fuerit, aut utrobique occurrat zerus; in residuo pariter zerus ponatur.

4to. Si nota subtrahendi in aliqua columna v. g. unitatum maior fuerit, quam respondens nota in minuendo, vel numerus a zero subtrahatur: præcedens nota minuendi e. g. decadam unitate multanda erit, & ad feriem unitatum transferatur; sic numerus sinisterior decuplo maior evadet: proin subtractio locum habebit.

5to. Si in minuendo plures occurrunt zeri immediate contigui; subtrahendus vero numerus notis constet positivis; hæc erit regula universalis: *zerus, a quo facienda est subtractio, valet 10, reliqui vero omnes 9, siqui adsunt immediate contigui; nota vero post zeros minuta est unitate.*



21. *Demonstratio.* Subtractione illud quæritur, quantus sit *excessus* maioris numeri supra minorem; seu, quæ utriusque sit *differentia*; atqui ope regularum, quas tradidimus, invenitur verus excessus unitatum, decadum &c. vera quoad singulas partes differentia: ergo etiam invenitur excessus verus totius minuendi supra totum subtrahendum, & vera utriusque differentia.

22. *Examen* Subtractionis est additio; si enim legitime peracta est; residuum additum subtrahendo debet restituere minuendum; *Totum quippe est æquale omnibus suis partibus simul sumptis.*

### 23. EXEMPLA.

I. Gravitas specifica auri purissimi est 19640  
 argenti puri specifica gravitas 11091  
 quanto gravius est aurum argente? *diff.* 8549

II. Jupiter a sole distat = 119900 }  
 Telluris distantia ab eodem sole = 22370 } Semid. Terræ  
 Quanta est differentia distantiarum? 97530 *differ.*

III. Tota hæreditas est = 20000 Floren.  
 Debita constituunt = 7428 Floren.  
 Quale erit residuum? = 12572



## §. 3.

*De Multiplicatione.*

24. *Multiplicatio* est eiusdem quantitatis toties ad se ipsam facta additio, quoties altera quantitas, per quam multiplicari illa dicitur, in se unitatem continet.

*Coroll.* Est ergo Multiplicatio compendiaria quædam methodus additionis sæpius alias repetendæ.

25. Illa quantitas, quæ multiplicatur cum alia, seu in aliam ducitur, *multiplicandus*: in quam altera ducitur, *multiplicator*: utraque communi vocabulo *factores* vocantur. Denique summa ex multiplicatione resultans *factum*, vel *productum* nuncupatur.

*Coroll.* Productum est summa multiplicandi toties sumti, quot multiplicator unitates continet; proin in facto toties debet contineri multiplicandus, quoties unitas in multiplicatore: seu, quia perinde est, quemcumque factorum pro multiplicatore accipias: in facto toties contineatur factor *A*, quoties in factore *B* continetur unitas.

26. PROBLEMA I. *Multiplicare inter se numeros simplices.*

*Resolutionem* dabit sequens Tabula. Ut vero usus pateat, notandum, quodsi columna ima AB numeros *multiplicandos* referat; numeri secundum lineam AC dispositi, & primi in quavis columna *multiplicatores*



tores erunt, aut contra; reliquæ autem columnæ his interceptæ *producta* dabunt respondentia. Sic in columna 2 omnia producta continentur numerorum naturalium, si per 2 multiplicantur. Columna 3 exhibet facta eorundem numerorum a ternario incipiendo, si per 3 multiplicantur, & sic de reliquis.

*Tabula multiplicationis simplicis.*

| A | 1 | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10  | B |
|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|-----|---|
|   | 2 | 4 | 6 | 8  | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20  |   |
|   |   | 3 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 | 30  |   |
|   |   |   | 4 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 | 40  |   |
|   |   |   |   | 5  | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50  |   |
|   |   |   |   |    | 6  | 36 | 42 | 48 | 54 | 60  |   |
|   |   |   |   |    |    | 7  | 49 | 56 | 63 | 70  |   |
|   |   |   |   |    |    |    | 8  | 64 | 72 | 80  |   |
|   |   |   |   |    |    |    |    | 9  | 81 | 90  |   |
|   |   |   |   |    |    |    |    |    | 10 | 100 |   |
|   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |     | C |

27. PROBLEMA II. *Multiplicare numerum compositum per simplicem.*

*Resolutio.* 1. Scribatur numerus multiplicandus, & infra dextimam ejus notam ponatur multiplicator; tum ducatur linea transversa. 2do.



2do. Ducatur multiplicator, incipiendo ab unitatibus in singulas multiplicandi notas.

3tio. Si particulare productum superat numerum 9; proin duabus notis exprimendum foret, scribatur solum nota dextima; altera addatur sequenti facto.

### EXEMPLUM.

|                           |       |
|---------------------------|-------|
| Sit <i>Multiplicandus</i> | 3785  |
| <i>Multiplicator</i>      | 4     |
|                           | <hr/> |
| erit <i>Productum</i>     | 15140 |

28. PROBLEMA III. *Multiplicare numerum compositum per alium compositum.*

*Resolutio.* imo. Numerum multiplican-tem subscribe multiplicando ea lege, uti numeros in additione, vel subtractione scribendos esse diximus.

2do. Multiplicandum numerum in singulas notas multiplicatoris ducito, ab unitatibus incipiendo.

3tio. Producta singula ita infra multiplican-tem scribe, ut ultima cujusvis facti nota sub ea ipsa multiplicantis veniat, quæ in multiplicandum ducta id factum præbet.

4to. Producta omnia partialia in unam summam colligito, & habebis totum productum.

### EXEMPLUM.

Sit area lapidibus quadratis sternenda. Longitudo areæ capiat 2568 id genus lapides: latitu-



titudo vero 435. Quæritur, quot numero lapides dicta area capiat?

|                                   |         |                      |
|-----------------------------------|---------|----------------------|
| Sit <i>Multiplicandus</i> numerus | 2568    |                      |
| <i>Multiplicator</i>              | 435     |                      |
|                                   | 12840   |                      |
|                                   | 7704    |                      |
|                                   | 10272   |                      |
| Totale <i>productum</i>           | 1117080 | dat numerum lapidum. |

*Schol.* Quandoque compendio locus est. imo. Si multiplicator præter alias notas etiam zeros continet; multiplicandus numerus nonnisi in notas reliquas significantes multiplicatoris ducatur; ita tamen, ut producta partialia ordine supra indicato (*Probl. præc. num. 3tio.*) scribantur. e. g. fit numerus 2456 ducendus in 3007 seu 2456

|                            |         |  |
|----------------------------|---------|--|
|                            | 3007    |  |
|                            | 17192   |  |
|                            | 7368    |  |
| obtinetur <i>productum</i> | 7385192 |  |

2do. Si ambo factores, vel alteruter in fine zeros habent, notæ reliquæ inter se multiplicentur; *producto* totali tot ad finem addantur zeri, quot in utroque factore continentur. E. g. multiplicetur 3500 per 620; ducatur 35 in 62: erit productum 2170; huic in fine addantur tres zeri, prodibit totale *productum* 2170000.

29. DEMONSTRATIO REGULARUM. Multiplicatio est ejusdem quantitatis additio ad se ipsam toties facta, quot altera, per quam multiplicatur, unitates continet:



(24) ut ergo legitima sit, in facto toties contineatur, oportet, multiplicandum, quoties unitas in multiplicatore: (25 Cor.) atqui, si juxta leges supra stabilitas multiplicatio peragitur, revera in producto multiplicandum toties continetur, quoties unitas in multiplicatore: ergo &c. Veritatem minoris subsumptæ *Examen* multiplicationis evidenter demonstrat, quod ope *divisionis*, de qua mox acturi sumus, instituitur.

## §. 4.

*De Divisione.*

30. *Divisio* est compendiaria subtractio, qua, quoties fieri potest, una quantitas ab altera demitur; ut, quoties altera in altera contineatur, innotescat. Quantitas, quæ aliam aliquoties continere ponitur, *dividenda*: quam altera una, pluribusve vicibus complectitur, *divisor*: illa demum, quæ indicat, quot vicibus divisor in dividendo contineatur, *quotus*, aut *quotiens* appellatur. Ex his notionibus sequentia corollaria deduces:

I. *In dividendo toties continetur divisor, quoties unitas in quoto reperitur.* Hinc semper erit quotus ad unitatem, ut dividendum ad divisorem.

II. *Fa-*



II. *Factum ex quoto in divisorem est æquale dividendo.*

III. *Quoti erunt, ut dividenda, si plures quantitates eosdem habent divisores, hoc est: quotus erit eo major, quo majus fuerit dividendum, & contra.*

IV. *Quoti erunt reciproce, ut divisores, si hi respectu æqualium quantitatum fuerint diversi. Hoc est: Quotus eo major orietur, quo minor fuerit divisor, & contra.*

31. *Quantitas, quæ per alteram exacte, quin residuum maneat, dividi potest, illius Multipla dicitur, sic e. g. 8 est multipulum numerorum 4. 2. Illa vero quantitas, cujus altera est multipla, dicitur aliquota, seu pars aliquota. Sic 4. 2. sunt partes aliquotæ numeri 8. Numerus vero, qui nullius alterius, quam unitatis est multipus, vocatur numerus primus. Ejusmodi sunt e. g. 1. 2. 3. 5. 7. 11. 13. 17. 19. 23. 29. &c.*

32. PROBLEMA I. *Dividere numeros simplices, quorum alter alterius multipus est.*

*Resolutionem dabit denuo sequens Tabula.*



## Tabula divisionis numerorum simplicium.

| A          | 1 | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | B Quo-<br>ti. |
|------------|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|---------------|
|            | 2 | 4  | 6  | 8  | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 |               |
|            | 3 | 6  | 9  | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 | 30 |               |
| Divisores. | 4 | 8  | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 | 40 | Dividendi.    |
|            | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 |               |
|            | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 | 60 |               |
|            | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 | 70 |               |
|            | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 | 80 |               |
| C          | 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 | 90 |               |

In hac tabula prima series numerorum naturalium A B *quotientes* exhibeat, altera vero verticalis A C *divisores* complectatur: columnæ, quæ his duabus seriebus includuntur, *dividendos* numeros repræsentant. Sic vero utere tabella hac: Quæritur e. g. quoties numerus 6 in numero 54 contineatur? Inquire datum divisorem in columna A C: ab hoc numero 6 a sinistra dextram versus perge, donec occurrat dividendus 54; tum ascende in linea verticali usque ad seriem A B, invenies quotum respondentem 9; & sic in reliquis.

33. PROBLEMA II. *Dividere numeros simplices, quando alter alterius perfecte multiplex non est.*

*Resolu-*



*Resolutio.* Quoniam in hoc casu verus, & exactus quotiens haberi nequit: 1<sup>mo</sup>. pro *quotiente* adsumitur minor eorum numerus, quos inter verus quotus continetur.

2<sup>do</sup>. Ducatur quotus hic in divisorem, & factum a dividendo subtrahatur.

3<sup>tio</sup>. Residuum invento quotienti addatur, eique interposita linea divisor subscribatur. En Exemplum:  $9 \overline{) 4\frac{1}{2}}$  quot.

$$\begin{array}{r} \text{Divisor} \quad 2 \\ \underline{8 \text{ productum}} \\ 1 \text{ Resid.} \end{array}$$

*Coroll.* Totum igitur negotium hoc tribus operationibus absolvitur: *divisione, multiplicatione, subtractione.*

34. PROBLEMA III. *Dividere numerum compositum per simplicem, vel alium compositum.*

*Resolutio.* 1<sup>mo</sup>. *Divide* primam, vel duas primas notas dividendi per primam notam divisoris.

2<sup>do</sup>. *Multiplica* inventum quotum per totum divisorem.

3<sup>tio</sup>. *Subtrahe* natum inde productum a dividendo.

4<sup>to</sup>. *Pone* juxta residuum, si quod adest, proximam e dividendo classsem.

5<sup>to</sup>. *Loca* infra novum dividendum divisorem, & operationem instaure, toties continuandam, donec dividendus exhaustus



fuerit penitus, & ad finem supersit nihil, aut residuum divisore minus; quod (uti supra dictum) ad quotum additur subscripto divisore.

## EXEMPLA.

I. Planities aliqua passus quadratos 250678 in se complectens quatuor æquales in partes dividatur; quæritur, quot passus quadrati cuius ejusmodi parti respondeant?

*Divisor* 4 (250678) 62669 $\frac{2}{4}$  *quotus*

$$\begin{array}{r}
 24 \\
 \hline
 10 \\
 8 \\
 \hline
 26 \\
 24 \\
 \hline
 27 \\
 24 \\
 \hline
 38 \\
 36 \\
 \hline
 2
 \end{array}$$

II. Distantia minima Saturni a tellure censetur 176330 semidiam. terrestrium: luna ab eadem tellure distita est in apogæo 54 Semid. Terr.

*Quoties distantia lune in illa Saturni continetur?*



Dividend. 176330 | 3265<sup>20</sup>/<sub>54</sub> = <sup>10</sup>/<sub>27</sub> quotus.

Divis. 54 I.

162

143

54 II.

108

353

54 III.

324

290 IV.

54

270

20 Resid. ult.

35. DEMONSTRATIO REGULARUM. Illud divisione quaeritur, quoties divisor in dividendo contineatur: atqui si juxta regulas supra adsignatas instituaturs divisio, istud revera invenitur: ergo &c. *dem. min.* Hac methodo enim invenitur, quoties divisor in singulis dividendi millenariis, centenariis, decadibus, ac unitatibus, i. e. in singulis partibus, proin etiam, in toto dividendo contineatur: ergo &c.

36. Ut adpareat, quotum inventum esse legitimum, ducatur ille in divisorem; & si productum fuerit æquale dividendo, divisio rite peracta est. *Examen* igitur divisionis est multiplicatio; uti multiplicationis examen divisionem esse, supra innuimus.



*Schol.* Notandum pro praxi imo. Si contigerit, ut in decursu divisionis nova nota dividendi cum residuo minor fuerit divisore, in quoto zerum scribe, & notam proximam dividendi statim præcedenti adjungito, & divisionem juxta datas leges continua.

2<sup>do</sup>. Si productum ex quoto in divisorem fuerit majus dividendo, a quo subtrahatur, signum est, quotientem justo majorem adsumptum fuisse. Sin vero residuum aut æquale, aut majus fuerit divisore, quotiens justo minor positus est.

3<sup>tio</sup>. Si divisor ad finem unum, vel plures zéros habet, compendii gratia in dividendo ex parte dextra tot abscindantur notæ, quot sunt zeri in divisore; notæ reliquæ per datum numerum divisoris reapse dividantur; in quoto notæ abscissæ residuo addantur, & summæ subscribatur divisor. Exempla rem clariorem reddent.

4<sup>to</sup>. Si tam in dividendo, quam divisore ad finem ponuntur zeri, in utroque totidem numero deleri possunt, & cum reliquis notis instituitur divisio. E. g. si 26000 dividantur per 300; dele utrobique duos zéros, & 260 per 3 divide.

5<sup>to</sup>. Quotus *novenario* major poni nunquam potest. Hinc, licet sæpe prima nota divisoris decies, aut sæpius in prima, vel duabus primis notis contineatur dividendi, pro quotiente tamen 9 vel 8 adsumendi erunt.

### CAPUT III.

DE OPERATIONIBUS ARITHMETICIS IN NUMERIS INTEGRIS, ET HETEROGENEIS.

Ejusmodi numeri heterogenei, seu diversæ denominationis quam plurimi dantur,



tur, quorum ingens catalogus texi posset. Hic tantum magis usitatos adpono, quorum nobis usus frequentior erit.

§. I.

*Variae dimensionum species.*

37. *Tempus* dividitur in annos, dies, horas, minuta.

*Annus* constat 365 diebus, 5 horis, 48 minutis, 45 secundis.

*Dies* complectitur 24 horas.

*Hora* 60 minuta prima.

*Minutum primum* 60 minutis secundis constat.

38. *Circulus* dividitur in 360 gradus.

*Gradus* constat 60 minutis primis.

*Minutum primum* 60 secundis.

39. *Milliare germanicum* æquatur 4 Italicis.

*Milliare italicum*           /       /       8 Stadiis.

*Stadium*               /       /       125 passibus.

*Passus*               /       /       5 pedibus.

40. *Hexapeda* est longitudo       6 pedum.

*Pes* complectitur       /       12 digitos.

*Digitus*               /       /       12 lineis.

41. *Decempeda* est virga       10 pedum.

*Pes* ejusmodi dividitur in   10 pollices,

*Pollex* continet               10 lineas.



|     |             |           |                    |
|-----|-------------|-----------|--------------------|
| 42. | Centenarius | æquivalet | 100 Libris         |
|     | Libra       | 32        | Semiunc. (Loth.)   |
|     | Semiuncia   | 4         | drachmis (Quintl.) |

---

|     |                     |       |            |
|-----|---------------------|-------|------------|
| 43. | Libra Pharmacopolii | habet | 12 uncias  |
|     | Uncia               | 8     | drachmas   |
|     | Drachma             | 3     | Scrupulos. |
|     | Scrupulus           | 20    | grana.     |

---

## §. 2.

*De reductione numerorum heterogeneorum.*

44. Duplex est reductionis modus; vel enim species superiores ad infimam reducendæ erunt: vel inferior quædam species successive ad superiores denuo redigatur. Prima reductio *descendens*: altera *ascendens* vocari solet.

45. PROBLEMA I. *Reducere species superiores ad infimam datam.*

*Resolutio* 1<sup>mo</sup>. Multiplicetur species superior per eum numerum, qui indicat, quoties unitas speciei proxime minoris in unitate speciei proxime maioris contineatur.

2<sup>do</sup>. Producto addatur numerus, si quis adfuerit, eiusdem speciei, ad quam proxime maior reducta est; atque hæc reducendi methodus tamdiu continuetur, donec omnes præcedentes classes ad datam infimam reductæ fuerint.

46. *Ex-*



EXEMPLA.

46. I. *Quæritur, quot minuta secunda complectan-*  
*d h ' "*  
*tur* 8. 15. 45. 2. Reducantur primo dies ad horas;  
obtinetur 192 horæ: huic addantur 15 h. erit  
Summa 207. Hæc summa si multiplicatur per  
60 (tot enim min. prima in hora continentur)  
prodibunt 12420 min. prima: his adde 45; ha-  
bebis 12465. Denique ista si ducantur denuo  
in 60 (quot nempe minutum primum secunda  
complectitur,) & producto addantur 2: Summa  
747902 quæsitum numerum minut. secund. ex-  
hibebit.

II. *Quæritur: quot pedes contineant*

Mill. germ. Stadia. passus. ped.

3. 6. 95. 0.

Reducantur primo mill. germ. ad italica. Tum  
ad stadia; prodibit numerus stadiorum univer-  
sim 102. Ista æquivalent 12750 passibus, qui una  
cum 95 faciunt 12845 passus. Hi denique in pe-  
dibus dabunt 64225 pedes.

47. PROBLEMA II. *Reducere datam spe-*  
*ciem infimam ad superiores.*

*Resolutio.* Hæc reductio ope *divisionis*  
obtinetur. Nempe datus numerus spe-  
ciei infimæ dividatur per alium, qui in-  
dicat, quoties unitas speciei proxime supe-  
rioris contineat unitatem proxime infe-  
rioris speciei. Quotus indicat speciem su-  
peri-



periores; residuum, si quod restat, ad speciem inferiorem referatur. Eodem modo & hæc species denuo ad sibi proximam superiorem reducenda erit.

### EXEMPLA.

I. Quot 34506 min. prima horas, & dies complectuntur?

Reducantur 34506 ad horas, datum numerum dividendo per 60, prodibit quotus  $575\frac{6}{10}$  i. e. 575 horæ, & 6 min. prima. Horas 575 reducito ad dies (quod fiet, si dividas datum numerum per 24.) quotus dabit 23 dies, & 23 horas.

ergo 34506 æquantur 23 dieb. 23 horis. 6 min. prim.

II. Datur longitudo 570089 linearum; quot pollices, pedes, hexapedas continet? Divide datum linearum numerum per 12; prodibit quotus 47507 poll. &  $\frac{5}{12}$  i. e. 12. lineæ. Hunc numerum pollicum denuo divide per 12, obtinebis 3958 ped. 11 pollices. Denique 3958 pedes divisi per 6 præbent 659 hexapedas, & 4 pedes. Proin 570089 lineæ æquivalent 659 hexap. 4 ped. 11 poll. 5 lin.

### §. 3.

*De Additione, subtractione, multiplicatione, & divisione numerorum heterogeneorum.*

49. PROBLEMA I. Numeros heterogeneos addere.

Reso-



*Resolutio.* 1<sup>mo</sup>. Scribantur eo ordine, ut numeri ejusdem speciei in eadem serie verticali consistant.

2<sup>do</sup>. Colligantur singulæ species in unam summam, initio facto ab infima.

3<sup>tio</sup>. Si summa cujusdam speciei una, vel pluribus vicibus contineat speciem proxime majorem, reducatur data summa ad speciem proximam; proveniens quotus eidem addatur: residuum vero scribatur in loco summæ reductæ.

EXEMPLUM.

| dies  | hor. | min. | min."                 |
|-------|------|------|-----------------------|
| 20    | 19   | 53   | 59                    |
| 14    | 23   | 36   | 14                    |
| 240   | 13   | 27   | 32                    |
| 18    | 7    | 45   | 6                     |
| <hr/> |      |      |                       |
| 292   | 64   | 162  | III Summæ non reductæ |
| 294   | 16   | 42   | 51 Summæ reductæ.     |

50. PROBLEMA II. *Numeros heterogeneos subtrahere.*

*Resolutio.* 1<sup>mo</sup>. Collocentur species, uti in additione; tum singulæ, initium ducendo iterum ab infima, a sibi respondentibus subtrahantur.

2<sup>do</sup>. Si numerus subtrahendus major fuerit numero minuendo, accipiatur a proxima specie unitas, quæ ad speciem proxime minorem reducta tot unitatibus æquivalet,



valet, quot superior species de inferiore complectitur. Exempla rem planiorem facient.

|    | grad.           | min. | prim. |        | grad.           | min. | prim. |
|----|-----------------|------|-------|--------|-----------------|------|-------|
| I. | 7. <sup>o</sup> | 9.   | 18    | Seu    | 6. <sup>o</sup> | 68   | 78    |
|    | 6.              | 48   | 20    |        | 6.              | 48   | 20    |
|    |                 |      |       | Resid. | 0.              | 20   | 58    |

## EXEMPLUM. II.

|        | Libr. apoth. | unc. | drachm. | scrup. |
|--------|--------------|------|---------|--------|
|        | 24.          | 3    | 0       | 0      |
|        | 13.          | 9    | 7       | 2      |
| seu    | Libr.        | unc. | drachm. | scrup. |
|        | 23.          | 14   | 7       | 3      |
|        | 13.          | 9    | 7       | 2      |
| Resid. | 10           | 5    | 0       | 1      |

51. PROBLEMA III. *Numeros heterogeneos multiplicare.*

*Resolutio.* Reduc multiplicandum ad infimam speciem: hanc per datum factorem multiplica; tum productum ad species denuo superiores reducito.

*Vel.* Singulas species dato factore multiplica, tum singula producta reducito ad classes altiores.

## EXEMPLUM.

*Luna intra horam percurrit arcum orbitæ suæ 32'. 56". quantum percurrit intra diem? omnia reducendo ad minuta 2da, obtinebis 1976". Hæc*  
fi



si ducis in 24, habebis factum 47424; seu reductione facta  $\overset{0}{13}.\overset{'}{10}.\overset{''}{24}$ . Vel fit

$$\begin{array}{r} 32.\overset{'}{56}.\overset{''}{\text{Multiplicandum}} \\ 24.\overset{''}{\text{Multiplicator}} \\ \hline \end{array}$$

erit  $768.\overset{'}{1344}.$

& reduc.  $\overset{0}{13}.\overset{'}{10}.\overset{''}{24}$ . *Productum.*

52. PROBLEMA IV. *Numeros heterogeneos dividere.*

*Resolutio.* Reducantur ad infimam speciem, hanc divide per datum divisorem. quotum ad altiores classes denuo reducito. *Residuum* infimæ classi adnumerandum erit.

### EXEMPLUM.

Obeliscus Vaticanus, Sixto Vto summo Pontifice, ope machinarum per 40 funes erectus fuerat. Pondus totius oneris elevandi erat 9146 centen. 80 libr. *Quæritur, quam partem ponderis singuli funium sustentarint.* Reducantur 9146 cent. 80 libr. ad speciem librarum; prodibunt 914680 libræ; hunc librarum numerum divide per 40: quotus dabit 22867 libras, id est, 228 cent. 67. libr.

*Schol.* Aliud longe productum, alius quotus prodiret, si datos numeros ipsos inter sese aut multiplicari, aut dividi oporteret. e. g. pedes per pedes, pollices per pollices. &c. istud vero, cum nonnisi in dimensionibus longitudinum, ac latitudinum locum habeat, de hac operandi ratione in geometria agendi locus erit.

### SECTIO



## S E C T I O II.

DE PRIMIS OPERATIONIBUS ALGEBRÆ  
CIRCA QUANTITATES INTEGRAS.

## C A P U T I.

## NOTIONES PRÆVIÆ.

53. *Algebra* est arithmetica quædam universalis, seu scientia magnitudinum, seu quantitatum in genere.

54. Algebra unam, pluresve quantitates literis exprimit & cognitæ quidem magnitudines primis alphabeti literis *a*, *b*, *c*, *d* &c. incognitæ extremis *y*, *x*, *z*, designat. Quandoque adhibentur primæ literæ earum vocum, quæ ipsas quantitates significant. E. g. tempus repræsentatur per *t*. celeritas per *c*, spatium per *s*. &c.

*Schol.* Illud quæri, a tironibus solet, quid tandem literæ *a*, *b*, *c*, &c. designent? Dico, quidquid augmenti, aut decrementi capax est. *Arithmetica* solum circa numeros, occupatur; algebra sese extendit ad numeros, ad tempus, motum, lineas superficies, paucis, ad quantitates omnes cogitabiles. Sic e. g. litera *a* designare potest non solum quamcumque quantitatem, verum quemcumque numerum quantitatum. Quare hæc scientia multo latior est arithmetica vulgari, quæ numeris utitur, multoque præstantior, quod in de cursu patebit, atque commodior.

55. Præ-



55. Præter literas signa quædam adhibentur, quæ aut literis præponi, aut quibus literæ connecti solent. Usitatiores sunt, quæ sequuntur:

Signum (+) duas inter quantitates literis, aut etiam numeris expressas medium indicat, has duas quantitates sibimet addendas esse; ac propterea *signum additionis* vocatur, & exprimitur per voculam *plus*. E. g.  $a + b$  sic lege: *a plus b*.

Signum (—) est *signum subtractionis*, & indicat, alteram quantitatē ab altera subtrahendam esse; enunciatur per *minus*. E. g.  $a - b$  idem est, ac, *a minus b*, seu ab *a* quantitatē *b* subtrahi oportere.

Signum (×) duas inter quantitates positum dicit, easdem inter se multiplicatas esse. E. g.  $a \times b$  denotat, *a* esse ductum in *b*. Duas quantitates inter se multiplicatas esse, etiam punctum interjectum designat. ( $a \cdot b$ ) vel, si plures literæ, aut numerici cum literis junguntur sine ullo signo; e. g.  $abc$ ,  $3a$ ,  $5bc$ .

Signum (:) divisionem significat: e. g.  $a : b$  dicit, *a* esse divisum per *b*. Divisio etiam hoc modo exprimitur:  $\frac{a}{b}$

Signum (=) æqualitatem designat; sic  $x = b$  innuit, *x* esse æquale *b*

Signum (<) indicat, duas quantitates, quas inter medium ponitur, esse inæquales, ita, ut ea quantitas, quam apex



respicit, minor sit altera, quæ latiori parti imminet. e. g.  $a < c$  dicit:  $a$  minorem esse quantitatem altera quantitate  $c$ .

56. Non raro operatio cum pluribus quantitativis faciendâ, multiplicatio præfertim, & divisio, solum indicatur. Tunc ita scribitur. e. g.  $\overline{ab - c} \times \overline{ac + 3d}$ ; vel  $(ab - c) \times (ac + 3d)$ ; vel  $(ab - c)(ac + 3d)$  idem dicunt hæ formulæ, ac, quantitatem totam  $\overline{ab - c}$  esse multiplicandam per alteram totam  $\overline{ac + 3d}$ .

57. Quantitates, quæ præfigitur signum additionis (+), *positivæ*: illæ, quæ habent signum subtractionis (—) *negativæ* vocantur. Hinc ipsa signa partim positiva, partim negativa denominari solent. Si quantitati nullum præfixum signum, illa *positiva* habetur, & signum (+) subintellegitur.

*Schol.* Dicitur quantitas aliqua modo *positiva*, modo *negativa*, quia eadem diverso accipi sensu potest, quorum alter alteri contrarius est. Denotet e. g. litera (a) 6 florenos; fieri potest, ut eos vel possideas, vel debeas: lucratus sis, vel perdidideris; in primo casu erit positiva, & signo (+) exprimitur: in altero negativa, & signum (—) adjungitur. Pariter, si quantitatem positivam dicas viam, motum, distantiam versus ortum, tempus futurum, altitudinem montis &c. erit via, motus, distantia versus occasum, tempus præteritum, vallis depressio, quantitas negativa. Inter positivum vero, & negativum communis



minis limes est *zerus*, seu *nihilum*. Quantitas vero negativa dicitur *minor nihilo*. Ceterum nec ipse *zerus*, si quantitas non abstracte sumatur, proprie *nihilum* est; sed est *verus*, & *realis* status quantitatis. Sic locus inter ortum, & occasum medius, horizontalis linea, quies inter determinationem ad accessum, & recessum, tempus praesens inter futurum, & praeteritum limes, & terminus verum, & realem statum quantitatis designat. Atque tali modo quantitas negativa & ipsa vera, & realis quantitas est.

58. Quantitas algebraica est vel complexa, vel incomplexa. *Incomplexa*, seu *monomium* illa dicitur, quae solitarie posita nulli seu anteriori, seu posteriori quantitati per signum  $+$  vel  $-$  connectitur; e. g.  $a. a b c. \frac{3ax}{4}$  &c. *Complexa* (*polynomium*) pluribus constat quantitatibus, signo  $+$ , vel  $-$  inter se connexis. e. g.  $a + b. 3c - d f + g$ . Partes singulae quantitatis polynomiae, quae signo  $+$  vel  $-$  substant, *termini* vocantur.

*Schol.* Si quantitas binis, tribus, quatuor terminis componitur, dicitur *binomium*, *trinomium*, *quadrinomium*.

59. Numeri, qui literis praefiguntur, nullo signo ( $+$  vel  $-$ ) interposito, vocantur *coefficientes* illius termini, cui adjunguntur. e. g.  $3a. 4 b c$ . Si terminus solitarie ponitur, e. g.  $a. b d$ . &c. *Coefficiens unitas* subintelligitur.



*Schol.* Quandoque alia litera loco coefficientis ponitur. E. g.  $naa$ , ubi  $(n)$  coefficientis est, & dicit, numerum quemcunque indeterminatum, seu tot unitatum, quot in  $(n)$  continentur.

60. Numerus alicui quantitati literali superne adscriptus dicitur illius quantitatibus *exponens*. E. gr.  $a^2$ ,  $b^2$  &c. numeri 2, 3 sunt exponentes. Non raro exponens indeterminatus est, & alia litera exprimitur: e. gr.  $c^n a^{m-1}$  &c. Quævis litera, cui nullus exponens adscriptus est, supponitur habere unitatem pro exponente.

*Schol.* Notandum est discrimen, quod inter exponentem, & coefficientem quantitatibus intercedit. *Coefficiens* dicit, quantitatem aliquam sæpius additione esse positam: *exponens* denotat, eandem quantitatem aliquoties positam esse multiplicatione. E. gr.  $3a$  ponitur loco  $a + a + a$ . Contra  $a^3$  est  $aaa$  seu  $a \times a \times a$ : Sit  $a = 3$ ; erit  $3a = 9$ .  $a^3 = 27$ .

61. Termini quantitatibus complexæ homogenei sunt, vel similes, si iisdem constant literis, & eadem litera eundem exponentem habeat; qualescunque eorum sint coefficientes, quæcunque signa. Contra termini, quos diversæ componunt literæ, aut, si literæ eadem quidem fuerint, variis tamen exponentibus adficiuntur, heterogenei, dissimiles vocantur.  $3ab - 5ab$  homogenei sunt termini:  $2a^2b$ ,  $2ab^2$  heterogenei, dissimiles.

*Schol.*



*Schol.* Notandum denique, valorem termini, quantitatem complexam constituentis, in algebra prorsus non dependere a loco, quo ponitur, relate ad alios terminos. Est enim  $ab + c - d = -d + c + ab$ . Solent tamen termini, quantum fieri potest, ordine alphabetico poni.

## CAPUT II.

DE REDUCTIONE, ADDITIONE, ET SUBTRACTIONE QUANTITATUM ALGEBRAICARUM.

### §. I.

#### *De Reductione.*

62. *Reductio est quantitatum algebraicarum simplicior expressio.*

63. *Regulae reducendi terminos sequentes duae statuuntur.*

REGULA I. *Termini; & singulae literae ejusdem termini, quantum fieri potest, ordinem alphabeti sequantur.*

REGULA II. *Termini similes, & homogenei reducantur ad unicum; aut, si alter elidat alterum, deleantur.*

*Schol.* Regula IIda triplicem casum comprehendit.

Imo. *Si signa terminorum similium sunt eadem, capiatur eorum summa.* E. gr.  $3ab + 2ab = 5ab$ .

IIdo. *Si signa contraria, & coefficientes inaequales, capiatur eorum differentia cum signo majoris coefficientis.* E. g.  $5ax^2 - 3ax^2 = 2ax^2$ .

C 3

III<sup>o</sup>io.



III<sup>o</sup> Itio. Si signa sunt contraria, & coefficientes æquales, deleantur. E. g.  $4ac - 4ac = 0$ .

## EXEMPLA.

$$\text{I. } 7ab - 5b^2 + 3ab - 7b^2 = 10ab - 12b^2.$$

$$\text{II. } 3a^2c + 5bc - 3a^2c - 3bc = 2bc.$$

$$\text{III. } 6b^2c - 5cd + 6cd - 7b^2c = -b^2c + cd.$$

reducta.

§. 2.

De Additione algebraica.

64. PROBLEMA. Quantitates algebraicas addere.

Resolutio. 1<sup>mo</sup>. Fiat debita terminorum dispositio; uti in exemplis mox adducendis patebit.

2<sup>do</sup>. Termini similes methodo, superius tradita, reducantur.

3<sup>tio</sup>. Termini dissimiles collocentur juxta se ordine alphabeti, retento cujuslibet termini signo.

## EXEMPLA.

$$\begin{array}{r} \text{I.} \quad 7ab - 5ac + 3bc - cd \\ \quad - 3ab - 7ac + 3bc - cd \\ \quad - 2ab + 8ac - 7bc + 2cd \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Summa} \quad 2ab - 4ac - bc$$

II.



$$\begin{array}{r}
 \text{II.} \quad 3a^2b - 3b^2c^2 + 1 \\
 - 5a^2b + 3b^2c^2 - 4 + 3ab^2 \\
 2a^2b + 5b^2c^2 - 4c \\
 \hline
 \text{Summa} \quad 5b^2c^2 + 3ab^2 - 4c - 3
 \end{array}$$

§. 3.

De Subtractione algebraica.

65. PROBLEMA. Quantitates algebraicas subtrahere.

*Resolutio.* Iisdem legibus absolvitur, queis additio, ita tamen, ut in terminis quantitatis *subtrahendæ* omnia signa mutantur, positiva in negativa, & vicissim.

EXEMPLA.

$$\begin{array}{r}
 \text{I.} \quad 8ab - 7ac + 3d \text{ Minuend.} \\
 5ab - 5ac \text{ Subtrahend.} \\
 - 5ab + 5ac \text{ mut. sign.} \\
 \hline
 3ab - 2ac + 3d \text{ differentia.}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{II.} \quad 4a^2b - 2a^2c - 1 \text{ Minuend.} \\
 - a^2b + a^2c + 3 \text{ Subtrahend.} \\
 a^2b - a^2c - 3 \text{ mut. sign.} \\
 \hline
 5a^2b - 3a^2c - 4 \text{ differentia.}
 \end{array}$$

66. *Demonstr.* Terminus subtrahendus, vel est positivus, vel negativus: atqui tollere positivum idem est, ac tantundem negativi addere, & tollere negativum idem,



ac tantumdem positivi addere: ergo, cum signis mutatis fit additio, reapse instituitur subtractio.

### CAPUT III.

DE MULTIPLICATIONE, ET DIVISIONE QUANTITATUM ALGEBRAICARUM.

#### §. I.

*De Multiplicatione.*

67. PROBLEMA I. *Multiplicare quantitates monomias inter se.*

*Resolutio* quatuor regulis innititur.

REGULA I. PRO LITERIS: *Literæ secundum ordinem alphabeti, alteri altera, adjunguntur, nullo signo interposito.* Ex. gr.  $a \times c \times f = a c f$ .

REGULA II. PRO COEFFICIENTIBUS: *Coefficientes inter se multiplicantur.* E. g.  $3 a b \times 5 c = 15 a b c$ .

REGULA III. PRO EXPONENTIBUS. Dum litera quæpiam exponente prædita multiplicanda est per se ipsam, itidem exponente adfectam, ea litera in producto semel scribitur, cum exponente, æquali summæ exponentium utriusque factoris. *Exponentes proin adduntur.* Seu  $a^3 \times a^2 = a^5$ .

DEMONSTRATUR REGULA. Est enim  $a^3 = a a a$ , (60. Schol.) &  $a^2 = a a$ : ergo



go erit  $a^3 \times a^2 = aaa \times aa = aaaaa$   
(Reg. I.)  $= a^5$ .

REGULA IV. PRO SIGNIS. *Signa factorum eadem dant factum positivum; contraria negativum.* Seu  $a \times b$ , vel  $-a \times -b = ab$ ;  $a \times -b$ , vel  $-a \times b = -ab$ .

DEMONSTR. Si ambo factores sunt positivi, res per se patet; superest itaque, ut demonstretur 1<sup>mo</sup>. signa diversa dare productum negativum: 2<sup>do</sup>. si ambo factores fuerint negativi, prodire factum positivum.

1<sup>um</sup> sic evincitur: Evidens est, quod  $a - a$  fit  $= 0$ : ergo etiam evidens est,  $a - a \times b$  fieri  $= 0$ . Est vero  $a \times b = ab$ : igitur  $-a \times b = -ab$  fit, oportet; nam alias  $a - a \times b$  non fieret  $= 0$ .

2<sup>dum</sup> ita demonstro: sit  $a - a \times -b$ ; ex prioribus sequitur,  $a \times -b$  esse  $= -ab$ : ergo  $-a \times -b$  erit  $= ab$ ; alias iterum  $a - a \times -b$  non foret  $= 0$ .

68. PROBLEMA II. *Multiplicare quantitatem polynomiam per monomiam, vel per aliam polynomiam.*

*Resolutio.* 1<sup>mo</sup>. Ducatur quivis terminus multiplicatoris in singulos terminos multiplicandi.

2<sup>do</sup>. Productum, si fieri potest, reducat<sup>ur</sup> ad simplicio<sup>rem</sup> expressionem.



## EXEMPLA.

$$\begin{array}{r} \text{I.} \quad 3a^2 - 5b + 2a \quad \text{Multiplicand.} \\ \quad \quad 4ab^2 \quad \text{Multiplicator.} \\ \hline 12a^3b^2 - 20ab^3 + 8a^2b^2 \quad \text{Productum.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{II.} \quad \begin{array}{l} 2a - 2b + c \\ 2a + b - 3c \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{factores.} \end{array} \right. \\ \hline \begin{array}{l} 4a^2 - 4ab + 2ac \\ 2ab - 2b^2 + bc \\ -6ac + 6bc - 3c^2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{facta partialia.} \end{array} \right. \\ \hline \text{Reducendo } 4a^2 - 2ab - 4ac - 2b^2 + 7bc \\ \quad \quad - 3c^2 \quad \text{factum totale.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{III.} \quad \begin{array}{l} a^m + 2b^x - ac^n \\ 2a^2 - 5b + 3cd^2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{factores.} \end{array} \right. \\ \hline \begin{array}{l} 2a^{m+2} + 4a^2b^x - 2a^3c^n \\ -5a^m b - 10b^x + 1 + 5abc^2 \\ 3a^m cd^2 + 6b^x cd^2 - 3ac^n + 1d^2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{facta partialia.} \end{array} \right. \\ \hline \begin{array}{l} 2a^{m+2} - 5a^m b + 4a^2b^x + 5abc^n \\ - 2a^3c^n + 3a^m cd^2 - 3ac^n + 1d^2 \\ - 10b^x + 1 + 6b^x cd^2. \end{array} \quad \text{Factum totale.} \end{array}$$

§. 2.

De Divisione.

69. PROBLEMA I. Dividere quantitatem  
quamcunque algebraicam per aliam incomplexam.  
Resolu-



*Resolutio.* 1<sup>mo</sup>. Scribatur divisor infra dividendum interjecta linea; dein fiat reductio ad simplicissimam expressionem his legibus:

I. REG. PRO LITERIS, Si tam divisor, quam dividendus communem habent unam vel plures literas cum iisdem exponentibus, eæ utrobique omittantur, aut aliis literis deficientibus unitas in earum locum subrogetur. E. g.

$$\frac{2ab - ac + a}{a} = \frac{2b - c + 1}{1} = 2b - c + 1.$$

$$\frac{a^2 bc}{a^2 cd} = \frac{b}{d}.$$

II. REG. PRO COEFFICIENTIBUS. 1<sup>mo</sup>. Si alter per alterum sine residuo dividi potest, uterque omittitur, & in loco majoris substituitur quotiens inventus. 2<sup>do</sup>. Si divisio sine residuo fieri nequit, uterque coefficientis retinetur, ut datus est, ita tamen, ut, si fieri potest, ad minores terminos reducat (methodo infra indicanda). 3<sup>tio</sup>. Si coefficientes sunt æquales, uterque deletur.

$$\begin{aligned} \text{E. g. } \frac{8a}{4b} &= \frac{2a}{b} \mid \frac{3cd}{12f} = \frac{cd}{4f} \mid \frac{4ac + 5bf}{4af} \\ &= \frac{c}{f} + \frac{5b}{4a} \mid \frac{9bc}{6c} = \frac{3b}{2} = b + \frac{b}{2}. \end{aligned}$$

III. REG.



III. REG. PRO EXPONENTIBUS: Si eadem litera tam in dividendo, quam in divisore occurrat, cum diversis exponentibus, ea semel tantum scribatur: exponent minor a majore subtrahatur, & differentia adscribatur literæ loco exponentis majoris.

$$\text{E. gr. } \frac{4 a^3 c}{2 a^2 c^2} = \frac{2 a}{c} \left| \frac{a b^2 d^3}{a^2 b d^2} = \frac{b d}{a} \right|$$

$$\text{Est enim e. gr. } \frac{a^3}{a^2} = \frac{a a a}{a a} \text{ (60. Schol.)}$$

$$= \frac{a}{1} \text{ (Reg. I.)} = a.$$

IV. REG. PRO SIGNIS. Quotiens ex duobus terminis eodem signo adfectis semper est positivus; ex terminis contraria signa habentibus, semper negativus. Seu  $\frac{+}{+}$ , &  $\frac{-}{-} = +$ .  $\frac{+}{-}$  &  $\frac{-}{+} = -$ . Alias enim nunquam quotus ductus in divisorem redderet dividendum.

$$\text{E. gr. } \frac{15 a b c}{- 3 a} = - \frac{5 b c}{1} = - 5 b c.$$

$$\frac{4 a x^2 - 3 x y}{2 x} = 2 a x - \frac{3 y}{2}.$$

70. PROBLEMA II. *Quantitatem complexam algebraicam per aliam complexam dividere.*

*Resolu-*



*Resolutio.* 1<sup>mo</sup>. Ordinetur ex legibus reductionis (63.) tam divisor, quam dividendum secundum aliquam, sed eandem utrobique literam, ita, ut ea, quæ habet exponentem majorem, præcedat, & dein reliqua ex ordine sequantur.

2<sup>do</sup>. Dividatur primus terminus dividendi per primum terminum divisoris juxta regulas præced. nam. traditas.

3<sup>tio</sup>. Per quotum inventum multiplicetur totus divisor, & factum subtrahatur a dividendo.

4<sup>to</sup>. Id quod e dividendo peracta subtractione remansit, rursus dividatur eodem plane modo, quo antea primus terminus dividendi; novus dein quotus denuo ducatur in totum divisorem, factumque a dividendo subtrahatur; atque tali modo continuetur operatio, dum aut totum dividendum fuerit exhaustum, aut residuum relinquatur, per modum fractionis quoto adscribendum.



## EXEMPLA.

| <i>Divisor</i> | <i>Dividend.</i>                      | <i>Quotus</i> |
|----------------|---------------------------------------|---------------|
| I. $a^2 - c^2$ | $(a^4 + c^2 x^2 - a^2 c^2 - a^2 x^2)$ | $a^2 - x^2$   |

*Multipl.*  $a^4 - a^2 c^2$

*Subtrah.*  $-a^4 + a^2 c^2$

---

I. *Residuum*  $-a^2 x^2 + c^2 x^2$

*Divisor*  $a^2 - c^2$

*Multipl.*  $-a^2 x^2 + c^2 x^2$

*Subtrah.*  $a^2 x^2 - c^2 x^2$

---

0.

| <i>Divisor</i>  | <i>Dividend.</i>                                 | <i>Quotus</i>   |
|-----------------|--------------------------------------------------|-----------------|
| II. $2c - 3f^2$ | $(6abc - 4c^2 d + 2cf - 9abf^2 + 6cdf^2 - 3f^3)$ | $3ab - 2cd + f$ |

*Multipl.*  $6abc - 9abf^2$

*Subtrah.*  $-6abc + 9abf^2$

---

I. *Residuum*  $-4c^2 d + 2cf + 6cdf^2 - 3f^3$

*Divisor*  $2c - 3f^2$

*Multipl.*  $-4c^2 d + 6cdf^2$

*Subtrah.*  $4c^2 d - 6cdf^2$

---

II. *Residuum*  $2cf - 3f^3$

*Divisor*  $2c - 3f^2$

*Multipl.*  $2cf - 3f^3$

*Subtrah.*  $-2cf + 3f^3$

---

0.

SECTIO



## S E C T I O III.

## THEORIA FRACTIONUM.

Sectionem hanc in duo capita dividimus: quorum primo Theoriam dabimus *fractionum communium*; in altero de alia fractionum specie, quam *decimales* vocant, agendum erit.

## CAPUT I.

## DE FRACTIONIBUS COMMUNIBUS.

## §. I.

*De natura, valore, & comparatione fractionum.*

71. Fractio generatim est *numerus designans unam, vel plures partes aliquotas ejus unitatis, ad quam refertur.* Et quoniam pars quævis comparate ad suas partes, queis constat, iterum instar unitatis haberi potest, *fractio fractionis* erit, quæ ex una, vel pluribus partibus aliquotis alicujus fractionis, ad quam refertur, composita est.

72. Si illæ partes aliquotæ, quas fractio continet, simul sumptæ unitatem non adæquant, fractio *genuina*, & *proprie talis* est. Si vero aut adæquant, aut omnino superant, *spuria*, *improprie talis* dicitur.

*Coroll.*



*Coroll.* Duo igitur de quavis fractione, ut intelligatur, qualis sit, quæri possunt. Primum est: *ex quot* partibus illa constet? Secundum: *ex quolibet* componatur partibus aliquotis? An ex tertiis, quartis, quintis &c. Hinc duobus numeris, seu duabus quantitatibus opus est, ut exprimatur fractio, quarum altera quantitas *numerum* partium aliquotarum, altera *qualitatem* exprimit; prima *numerator* dicitur; quia numerat, & significat, *quot* partes fractio complectatur: altera *denominator* audit; quia denominat *qualitatem* partium aliquotarum ejus unitatis, ad quam refertur fractio.

73. Fractio quævis ita scribi solet, ut numeratorem a denominatore transversa lineola distinguat, sic, ut supra lineam numerator, infra denominator ponatur. Sit ex. gr. *a* numerator, *b* denominator: fractio ita exprimitur  $\left(\frac{a}{b}\right)$ . Sic in  $\left(\frac{2}{3}\right)$  numerus 2 numerator est, & dicit, *quot* partes sint accipiendæ, scilicet *duæ*: numerus 3 denominator; quia significat, *quales* partes data fractio contineat, nempe *tertias*; proin  $\left(\frac{2}{3}\right)$  dicit duas tertias partes aliquotitas ejus unitatis, ad quam fractio refertur. Sit linea quævis in tres æquales partes divisa illa unitas, ad quam fractio refertur; qui  $\frac{2}{3}$  habet, duas tertias partes datæ lineæ obtinet.



73. Revera omnis fractio quotiens est, qui emergit ex divisione numeratoris per denominatorem. Itaque cujuslibet fractionis numerator est aliquod *dividendum*: denominator est *divisor*, & fractio ipsa est *quotus* ex divisione emergens.

*Coroll.* Sit numerator fractionis  $= n$ ; denominator  $= d$ : quotus, seu ipsa fractio  $= f$ . Quoniam in omni divisione quotus est ad unitatem, uti dividendum ad divisorem (30. Cor. 1.); erit  $f$  ad 1, uti  $n$  ad  $d$  ( $f:1 = n:d$ ).

Quamobrem, si fuerit numerator ( $n$ ) minor, quam denominator ( $d$ ): erit etiam fractio ( $f$ ) minor unitate: fractio autem minor unitate *genuina* dicitur. Quare *omnis fractio genuina erit, cujus numerator fuerit minor denominatore*. Cujusmodi sunt  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{2}{5}$  &c.

2<sup>do</sup>. Si fuerit  $n = d$ , erit etiam  $f = 1$ ; hoc est: *Si fractionis numerator, & denominator aequales sunt, fractio aequabitur unitati*. Sic  $\frac{3}{3} = 1$ .  $\frac{a}{a} = 1$ .  $\frac{bc}{bc} = 1$ . &c.

3<sup>tio</sup>. Si ponatur, esse  $n > d$ , erit quoque  $f > 1$ ; id est: *fractio major est unitate, cujus numerator est major denominatore*. Omnis adeo fractio, cujus numerator non fuerit minor denominatore, spuria est, & improprie talis (72).

74. THEOREMA I. *Duce quaelibet fractiones, eundem denominatorem habentes, sunt inter se, ut earum numeratores.*



*Dem.* Si duæ quantitates diversæ per eandem tertiam dividantur, quoti emergentes inter se sunt, uti dividenda (30. Cor. III.). Sunt vero fractiones quoti, emergentes ex divisione numeratoris per denominatorem (73): ergo sunt inter se, uti numeratores.

*Coroll.* Valor ergo fractionis tanto præcise major est, quanto major fuerit numerator, & contra, stante eodem denominatore. Itaque est  $\frac{5}{8} > \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} < \frac{5}{7}$ . Sit  $a > c$ ; erit  $\frac{a}{b} > \frac{c}{b}$ .

75. THEOREMA II. Duæ quælibet fractiones, eundem numeratorem habentes, sunt inter se reciproce, ut earum denominatores.

*Dem.* Si duæ quantitates æquales habent diversos divisores, quoti emergentes sunt reciproce, uti divisores; hoc est, quotus tanto major obtinetur, quanto minor fuerit divisor: & contra (30. Cor. IV.). Sunt autem fractiones quoti, ex divisione numeratoris per denominatorem faciunda emergentes: ergo sunt inter se reciproce, ut denominatores.

*Coroll.* Valor itaque fractionis in ea ratione crescit, in qua decrescit ejusdem denominator, & contra, stante eodem numeratore. Est proin  $\frac{3}{5} > \frac{3}{7}$ ;  $\frac{2}{5} < \frac{2}{7}$ ; sit  $b > c$ ; erit etiam  $\frac{a}{b} < \frac{a}{c}$ .

76. THEO-



76. THEOREMA III. *Si ejusdem fractionis & numerator, & denominator in eadem ratione crescunt, vel decrescunt, valor fractionis idem manet, nec mutatur.*

*Dem.* Stante eodem denominatore, valor fractionis in ea præcise ratione augebitur, in qua crescet numerator & contra (Theor. I. Cor.); & stante eodem numeratore valor fractionis in ea præcise ratione decrescet, aut crescet, in qua crescet, aut decrescet ejusdem denominator (Theor. II. Cor.): ergo si & numerator, & denominator fractionis *in eadem ratione* crescunt, vel decrescunt, fractionis valor haud mutatur.

*Coroll.* *Valor fractionis non mutatur, si tam numerator, quam denominator per eandem quantitatem aut multiplicatur, aut dividitur.*

*Schol.* Sit fractio  $\frac{a}{b}$  tum quoad numeratorem, tum quoad denominatorem multiplicanda per  $c$ ; erit factum  $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$  (69). Item dividatur fractionis  $\frac{a}{b}$  tam numerator, quam denominator per  $c$ , erit  $\frac{a:c}{b:c} = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{c} \times \frac{c}{b} = \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$ . Ergo manifestum est, *valorem fractionis non mutari, si tam numerator, quam denominator per eandem quantitatem aut multiplicatur, aut dividitur.*



77. THEOREMA IV. *Duæ quælibet fractiones, & diversos numeratores, & diversos denominatores habentes, sunt inter se, uti facta numeratorum in alterius fractionis denominatorem.*

*Dem.* Sint duæ fractiones  $\frac{a}{b}$  &  $\frac{c}{d}$ ; dico, esse  $\frac{a}{b}$  &  $\frac{c}{d}$  inter se, uti  $ad$ , &  $bc$ .

Est enim  $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$ ; &  $\frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}$ : (77. Theor. IV.) atqui  $\frac{ad}{bd}$ , &  $\frac{bc}{bd}$  sunt inter se, uti  $ad$ , &  $bc$  (74. Theor. I.): ergo etiam erunt  $\frac{a}{b}$ , &  $\frac{c}{d}$  inter se, uti  $ad$ , &  $bc$ ; hoc est: uti facta numeratorum in denominatorem alterius fractionis.

*Coroll. I.* Quare duarum quarumlibet fractionum ( $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{5}{7}$ ) illa erit major altera, cujus numerator, si in alterius denominatorem ducitur, productum majus efficit. Ita cognoscitur  $\frac{2}{3} < \frac{5}{7}$ ; quia  $(2 \times 7) < (5 \times 3)$ prehenditur.

*Coroll. II.* Si fractionum duarum termini decussatim multiplicati producunt facta æqualia, fractiones æquales erunt; & vicissim, si æquales sunt fractiones, earum termini decussatim multiplicati facta æqualia producent. Hinc intelligitur ( $\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$ ); quia  $(2 \times 6) = (3 \times 4)$ .

*Schol.*



*Schol.* Quæ hucusque de comparatione fractionum dicta sunt, planiora fient, cum de proportionibus algebraicis agendi locus erit.

## §. 2.

*De reductione fractionum.*

78. Reductio fractionum ad sequentes potissimum quatuor casus extenditur. 1<sup>mo</sup>. Si integra vel seorsim sumta, vel una cum adjecta fractione denuo ad fractionum formam reduci oportet.

2<sup>do</sup>. Si fractio data in aliam dati denominatoris immutatur:

3<sup>tio</sup>. Si duæ, vel plures fractiones ad eundem denominatorem reducantur:

4<sup>to</sup>. Denique, si eadem fractio, quæ infinitis aliis æquivalere potest (77. Theor. IV.), simplicioribus terminis exprimatur. Methodum reductionis resolutio sequentium problematum dabit. Unde illud quoque evidenter patebit, hac reducendi methodo fractionum valorem eundem semper persistere.

79. PROBLEMA I. Numerum integrum (*a*) ad fractionem reducere, quæ habeat denominatorem datum (*b*).

*Resolutio.* Multiplicetur *a* per *b*, & subscribatur *b*: erit  $a = \frac{ab}{b}$  (69.).



*Schol.* Reducatur 4 ad fractionem, cujus denominator fit 6; erit  $4 = \frac{4 \times 6}{6} = \frac{24}{6}$ . Sic  $3 = \frac{15}{5}$  &c.

80. PROBLEMA II. Numerum integrum ( $a$ ) mixtum fractione  $\frac{c}{d}$  ad unicam reducere fractionem.

*Resolutio.* Multiplicetur  $a$  per  $d$ ; facto adde numeratorem fractionis ( $c$ ). Summæ subscribatur idem denominator ( $d$ ); dico, fore  $a \frac{c}{d} = \frac{ad + c}{d}$ .

*Schol.* Reducantur sequentes numeri:  $4\frac{3}{5}$ ,  $3\frac{2}{7}$ ; obtinebis  $\frac{23}{5}$ ,  $\frac{23}{7}$ .

81. PROBLEMA III. Fractionem datam  $\left(\frac{a}{b}\right)$  ad denominatorem datum ( $d$ ) reducere, quin ejus valor immutetur.

*Resolutio.* Multiplica  $d$  per  $a$ , & factum ( $ad$ ) divide per ( $b$ ): quoto subscribe denominatorem datum ( $d$ ); dico, fore  $\frac{ad : b}{d} = \frac{a}{b}$ .

*Dem.* Sit interim fractionis quærendæ numerator incognitus  $= x$ . Erit  $\frac{a}{b} = \frac{x}{d}$ , &  $ad = bx$  (77. Cor. II.) & utrumque Divi-



dividendo per  $b$ , fiet  $\frac{ad}{b} = x$ ; adeoque  $\frac{x}{a}$   
 $= \frac{ad:b}{a} = \frac{b}{a}$ .

*Schol. I.* Hoc problemate omnis fractionis valor absolutus in partibus notis inveniri potest. Ex. gr. si quis rescire cupiat, quot crucigeros valeat hæc fractio  $\frac{2}{5}$  flor. Reducatur ad aliam, cujus denominator sit  $= 60$ ; quia cruciger est pars 60ma floreni. Si scire velit, quot Grossos, Bazios, duodenarios &c. reducatur ad denominatorem 20, 15, 5 &c. Ita reperies perticæ geometricæ  $\frac{1}{9}$  esse æqualem uni pedi, uni digito, uni lineæ, uni decimæ, & sic in infinitum, seu  $\frac{1}{9} = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000}$  &c. Item unius horæ  $\frac{1}{59} = \frac{1}{60} + \frac{1}{360} + \frac{1}{21600}$  &c. seu uni minuto primo, cum secundo, tertio, quarto, quinto &c. Maximi usus est in praxi hoc problema ad valorem fractionis in partibus notis determinandum; quare etiam sic solet enunciari: *Invenire valorem fractionis in partibus notis.*

*Schol. II.* Eadem via reduci quælibet fractio posset ad numeratorem datum ( $n$ ). Etenim, quia  $\frac{a}{b} = \frac{n}{x}$ ; erit  $ax = bn$ , &  $x = \frac{bn}{a}$  proin  $\frac{a}{b} = n : \frac{bn}{a} = \frac{an}{bn}$ . Hujus problematis usus esse posset, si ex. gr. quæreretur, si  $\frac{2}{3}$  floreni inter sex pauperes vellem dividere æqualiter; quota unicuique pars obveniret? Quærat ergo denominator fractionis, quæ datæ ( $\frac{2}{3}$ ) æquivalet, & habeat pro numeratore 6, ut sit  $\frac{2}{3} = \frac{6}{x}$ ; erit

$$D \quad 4 \quad x =$$



$x = \frac{18}{2} = 9$ . Erit ergo  $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ . Intelligo igitur, nonam floreni partem competere singulis, seu  $\frac{1}{9}$ ; quæ fractio, si reducatur denuo ad aliam dati denominatoris (uti supra) patebit, cuius pauperi obtingere 6 crucigeros, &  $\frac{6}{9}$  crucigeri &c.

82. PROBLEMA IV. *Fractiões quocunque ad eundem denominatorem reducere.*

*Resolutio.* Ducatur cujusvis fractionis numerator in denominatores reliquarum fractionum; dein omnes denominatores in sese ducantur, factum inde oriundum dabit novum, & communem denominatorem.

*Dem.* Tali modo & numerator, & denominator fractionis cujuslibet per eundem numerum multiplicatur: ergo fractionum reductarum ad communem denominatorem valor non mutatur (76. Coroll.).

*Schol. I.* Sint reducendæ sequentes fractiones ad communem denominatorem:  $\frac{a}{b}$ ,  $\frac{2b^2}{c}$ ,

$\frac{3d}{2f}$ : erunt *reductæ*  $= \frac{2acf, 4b^3, f3bcd}{2bcf}$ . Item

$\frac{5}{3}$ ,  $\frac{4}{7}$ ,  $\frac{2}{9}$  erunt *reducendo*  $= \frac{180}{315}$ ,  $\frac{180}{315}$ ,  $\frac{70}{315}$ . Hac ratione facile innotescit, quænam ex pluribus fractionibus majoris sit valoris; illa nempe, quæ reducta majorem habet numeratorem (74. Cor.).

*Schol. II.* In hac fractionum reductione sæpe locus est compendio. Et imo. quidem, si unius fractio-



fractionis denominatoris ceterarum denominatores fuerint partes aliquotæ, quævis earum ducatur in eum quotum, qui indicat, quoties ejus denominator in denominatore illo maximo contineatur. Ex. gr.  $\frac{1}{12}$ ,  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{5}{8}$ ,  $\frac{2}{3}$  hac methodo reducuntur ad  $\frac{1}{12}$ ,  $\frac{9}{12}$ ,  $\frac{10}{12}$ ,  $\frac{8}{12}$ .

2do. Si duarum fractionum denominatores habent communem divisorem, illæ ad eundem denominatorem reducuntur, si quævis fractio ducitur in eum quotum, qui oritur ex divisione alterius denominatoris per communem divisorem. Ex. gr.  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{3}{4}$  communem divisorem habent 2. Si prima fractio  $\frac{1}{3}$  ducitur in 2, & altera  $\frac{3}{4}$  in 2, reducentur ad has:  $\frac{2}{6}$ ,  $\frac{3}{6}$ . Tali modo reduces  $\frac{5}{8}$ ,  $\frac{5}{12}$  ad  $\frac{5}{24}$ ,  $\frac{10}{24}$ .

3tio. Si plures fractiones habent denominatores, quorum singuli exacte in aliquo numero tertio continentur, quævis fractio ducatur in eum numerum, qui indicat, quoties ejusdem denominator in tertio illo numero contineatur. Ex. gr. sint fractiones  $\frac{3}{8}$ ,  $\frac{5}{12}$ ,  $\frac{3}{6}$ ; quia 8, 12, 6 sunt partes aliquotæ numeri 24; prima fractio multiplicetur per 3: 2da per 2; 3tia per 4, & erunt reductæ  $\frac{9}{24}$ ,  $\frac{10}{24}$ ,  $\frac{12}{24}$ .

83. PROBLEMA V. *Datam fractionem ad minores, atque adeo ad minimos terminos reducere.*

*Resolutio.* Fractionis cujusvis tam numerator, quam denominator dividatur per aliquam quantitatem, quæ in utroque exacte continetur. Sic & termini fractionum imminuentur, & valor fractionis non mutabitur.

D 5

Ex. gr.



Ex. gr.  $\frac{30a^3b}{60ac}$  divid. per  $30a$  fit  $\frac{a^2b}{2c} = \frac{140}{210}$

divid. per  $70$  fit  $\frac{2}{3}$ .

*Schol.* Equidem in literis communis numeratoris, & denominatoris divisor facilius reperitur; non item in numeris paulo majoribus. Hinc methodum tradunt, inveniendi *communem divisorem maximum*, per quem scilicet divisa fractio ad simplicissimam expressionem reducitur.

84. PROBLEMA VI. *Duorum quorumvis numerorum divisorem communem maximum invenire.*

*Resolutio.* Dividatur major numerus per minorem; & si quotus annexam habet fractionem, hujus fractionis iterum major numerus per minorem dividatur, & hoc tamdiu fiat, dum inveniatur quotus ab omni fractione purus; erit divisor ille ultimus, qui quotum purum dederit, simul divisor communis maximus.

Sit ex. gr. reducenda fractio  $\frac{21}{294}$ ; dividatur 1<sup>mo</sup>. 294 per 91; erit quotus  $3\frac{21}{91}$ . 2<sup>do</sup>. Dividatur 91 per 21; quotiens est  $4\frac{7}{21}$ . 3<sup>tio</sup>. Demum 21 per 7 si dividatur, obtinetur quotus 3 sine residuo: erit ergo 7 divisor communis maximus; quare fractionem datam  $\frac{21}{294}$ , per 7 dividendo tam ejus numeratorem, quam denominatorem, ad minimam expressionem reduces  $= \frac{13}{42}$ . Si in divisione ad residuum 1 devenitur, id indicio est, fractionem ad expressionem simpli-



simpliciore reduci non posse; quia unitas omnium numerorum communis est divisor.

*Schol.* Pro praxi fere sufficiunt sequentes animadversiones 1<sup>mo</sup>. si numerator est pars aliquota denominatoris, tota fractio per numeratorem potest dividi. Ex. gr.  $\frac{a}{ab} = b \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$ .

2<sup>do</sup>. Si tam numerator, quam denominator fuerint numeri pares, communis divisor semper erit 2. Ex. gr.  $\frac{8}{32} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ .

3<sup>tio</sup>. Si tam numerator, quam denominator in fine habuerint zeros, ambo dividi poterunt per 10, 100 &c. Ex. gr.  $\frac{30}{250} = \frac{3}{25}$ .

4<sup>to</sup>. Si tam numerator, quam denominator in fine habuerint numerum 5; vel alter 5, alter vero zerum, communis divisor erit 5. Ex. gr.  $\frac{35}{450} = \frac{7}{90}$ .

5<sup>to</sup>. Si summa notarum, quæ numeratorem constituunt; item summa notarum denominatoris, sunt multipla ternarii; divisor communis erit numerus 3. Ex. gr.  $\frac{23}{255} = \frac{11}{85}$ .

### §. 3.

#### *De operationibus fractionum communium.*

85. PROBLEMA I. *Fractiones communes addere.*

*Resolutio.* 1<sup>mo</sup>. Si fractiones addendæ jam habent eundem denominatorem; earundem numeratores in unam summam colligantur, eique communis denominator sub-



subscribatur. Ex. gr. sint addendæ  $\frac{3}{15} + \frac{5}{15} + \frac{7}{15}$  erit summa  $= \frac{15}{15} = 1$ .

2<sup>do</sup>. Si denominatores fuerint diversi, prius reducantur ad eundem, tum addantur. Ex. gr.  $\frac{3}{5} + \frac{2}{3} = \frac{9+10}{15} = \frac{19}{15} = 1\frac{4}{15}$ .

3<sup>tio</sup>. Si integri fractis miscentur: vel integri reducantur ad fractos (79. 80.): vel tam integri, quam fracti seorsim addantur. Ex. gr.  $2\frac{3}{4} + 5\frac{2}{3} = 7\frac{9+8}{12} = 7\frac{17}{12} = 8\frac{5}{12}$ .

86. PROBLEMA II. *Fractiones communes subtrahere.*

*Resolutio.* 1<sup>mo</sup>. Subtrahatur numerator unius a numeratore alterius fractionis, si fuerit utrobique idem denominator, sin minus; prius reducantur ad eundem denominatorem. Ex. gr.  $\frac{7}{8} - \frac{5}{8} = \frac{2}{8}$ . Item  $\frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{15-8}{20} = \frac{7}{20}$ .

2<sup>do</sup>. Si ab integro fractio subtrahenda est; ab eodem dematur unitas, eaque ad fractionem reducatur ejusdem denominatoris, cujus est ipsa fractio subtrahenda; tum fiat subtractio methodo prius indicata. Ex. gr. sit  $4 - \frac{3}{7} = 3\frac{7}{7} - \frac{3}{7} = 3\frac{4}{7}$ . Vel  $1 - \frac{2}{3} = \frac{3}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ .

3<sup>tio</sup>. Si ab integro cum fractione alia fractio sine integro subtrahenda fuerit; reducan-



ducantur fractiones (si opus fuerit) ad eundem denominatorem; tum numeratores subtrahantur. Ex. gr.  $2\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = 2\frac{2}{4} = 2\frac{1}{2}$ . Vel  $3\frac{3}{4} - \frac{3}{5} = 3\frac{15-12}{20} = 3\frac{3}{20}$ .

4<sup>to</sup> Si facta reductione ad communem denominatorem fractio subtrahenda major adparet, quam minuenda: augeatur hæc, unitatem demendo ab integro numero, quem fractio minuenda annexum habet, eumque ad fractionem reducendo, ut num. 2<sup>do</sup>. diximus. Ex. gr.  $2\frac{2}{5} - \frac{3}{4} = 2\frac{8-15}{20} = 1\frac{20}{20} + \frac{8}{20} - \frac{15}{20} = 1\frac{28-15}{20} = 1\frac{13}{20}$ .

5<sup>to</sup>. Si fractio & minuenda, & subtrahenda numeris integris mixtæ fuerint; integri ab integris, fracti a fractis numeris subtrahantur. Ex. gr.  $4\frac{1}{2} - 3\frac{2}{7} = 4\frac{7}{14} - 3\frac{4}{14} = 1\frac{3}{14}$ .

87. *Multiplicare fractionem unam per aliam fractionem*, hoc dicit: accipere fractionis multiplicandæ talem partem, vel tales partes aliquotas, qualem, vel quales indicat fractionis multiplicantis denominator, & quidem tot, quot numerator indicat. E. gr. si sit  $\frac{2}{3}$  per  $\frac{2}{5}$  multiplicandum; id demum quæritur, qualem, vel quales partes aliquotas unius integri habiturus sim, si de duabus unius integri tertiis, quintam partem bis, vel duas quintas capiam?

Coroll.



*Coroll.* Itaque si scirem, quanta sit pars quinta hujus fractionis ( $\frac{2}{3}$ ); eandem bis fumere, seu per duo multiplicare deberem. Jam vero, quanta sit pars quinta fractionis ( $\frac{2}{3}$ ) invenitur, si  $\frac{2}{3}$  dividantur per 5; seu si denominator per 5 multiplicatur. Quare, ut  $\frac{2}{3}$  per  $\frac{2}{5}$  multiplicem, debeo & numeratores inter se, & denominatores multiplicare. Hinc patet methodus solvendi sequens

88. PROBLEMA III. *Fractionem per fractionem multiplicare.*

*Resolutio.* Multiplicentur numeratores, & denominatores utriusque fractionis directe inter se; dico, fore  $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ .

*Dem.* Ut fractio  $\frac{a}{b}$  multiplicetur per alteram  $\frac{c}{d}$ , debet primum dividi per  $d$ , dein quotus multiplicari per  $c$  (Cor. præc.). Atqui  $\frac{a}{b}$  dividitur per  $d$ , si fiat  $\frac{a}{bd}$ , & quotus  $\frac{a}{bd}$  multiplicatur per  $c$ , si fiat  $\frac{ac}{bd}$ : ergo si multiplicentur numeratores, & denominatores inter se, erit  $\frac{ac}{bd} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ .

*Coroll.* Qui hujus multiplicationis naturam plane cognoscit, videt, multiplicatione ista obtineri fractionem fractionis. Quare,



re, si fractio fractionis ex. gr.  $\frac{2}{5}$  hujus fractionis  $\frac{2}{5}$  petantur; erit omnino fractio  $\frac{2}{5}$  per  $\frac{2}{5}$  multiplicanda, ut habeatur petitum  $= \frac{4}{25}$ . Hinc mirum non est, productum fieri minus factoribus.

*Schol. I.* Si quantitas integra per fractionem multiplicanda est, illa in hujus numeratorem ducatur, & facto subscribatur denominator. Ex. gr.

$$a \times \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}. \quad 3 \times \frac{2}{5} = \frac{6}{5}.$$

Si vero una, vel utraque fractio quantitatem integram annexam habet, illa prius reducatur ad fractionem (80). tum fiat multiplicatio. Ex. gr.

$$3\frac{2}{3} \times 4\frac{1}{2} = \frac{11}{3} \times \frac{9}{2} = \frac{99}{6} = 16\frac{3}{6} = 16\frac{1}{2}.$$

*Schol. II.* Si fractionis denominator per quantitatem, integram dividatur, perinde est, ac si ejusdem numerator, proin tota fractio per datam quantitatem multiplicetur. Nam  $\frac{3}{4:2} = \frac{3}{2}$

$$= 1\frac{1}{2} \text{ \& } \frac{3}{4} \times 2 = \frac{6}{4} = 1\frac{1}{2} \text{ \& universim}$$

$$\frac{a}{b:c} = \frac{ac}{b}. \text{ Dividendo enim denominatorem fra-}$$

ctionis per quantitatem integram ejusdem fractionis valor in eadem ratione crescit, ac si per dictam quantitatem fractionis numerator multiplicetur (76.).

89. Si fractio aliqua per aliam fractionem dividi debet, illud quæritur, quoties fractio dividens contineatur in fractione dividenda? Sic si  $\frac{3}{4}$  dividatur per  $\frac{1}{2}$ , quæritur quoties in fractione  $\frac{3}{4}$  contineatur fractio  $\frac{1}{2}$ .

90. PRO-



90. PROBLEMA IV. *Fractionem per fractionem dividere.*

*Resolutio.* Invertatur dividens fractio, & per eam ita inverſam multiplicetur fractio dividenda, habebitur fractio ſignificans quotum. Ex. gr. ſi  $\frac{a}{b}$  per  $\frac{c}{d}$  dividenda ſit, fiat primum  $\frac{d}{c}$ ; poſtea  $\frac{d}{c} \times \frac{a}{b}$ ; harum productum  $\frac{ad}{bc}$  erit quotus quæſitus.

*Dem.* Sit interim  $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = x$ ; dico fore  $x = \frac{ad}{bc}$ . Quoniam divisor ſemper eſt ad unitatem, uti dividendum ad quotum (80. Cor. I.) erit  $\frac{c}{d}$  ad 1; uti  $\frac{a}{b}$  ad  $x$ ; ſeu  $\frac{c}{d} : 1 = \frac{a}{b} : x$ . Rurſus eſt  $\frac{c}{d}$  ad 1; uti  $c$  ad  $d$ ; ſeu  $\frac{c}{d} : 1 = c : d$  (73. Cor.). Ergo erit etiam  $c : d = \frac{a}{b} : x$  (quia hæ duæ rationes ſunt eidem tertiæ  $\frac{c}{d} : 1$  æquales:) & hinc  $c x = \frac{ad}{b}$ , & utrumque membrum dividendo per  $c$ , erit  $x = \frac{ad}{bc}$ . Aliter: ſit  $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = x$ , erit  $x : 1 = \frac{a}{b} : \frac{c}{d}$  (30. Coroll. I.) & hinc etiam  $\frac{cx}{d} = \frac{a}{b}$ ; mul-



multiplicetur utraque fractio per  $d$ ; erit  
 $c x = \frac{ad}{b}$ ; & dividendo per  $c$ , erit  $x = \frac{ad}{bc}$ .

*Schol. I.* Cum utraque demonstratio planiorem notionem proportionum supponat, ea interim omitti potest; donec theoria de proportionibus fuerit explicata.

*Schol. II.* Adnecto nonnulla exempla in numeris:  $\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \times \frac{2}{1} = \frac{6}{4} = 1\frac{1}{2}$ . Item

$3 : \frac{2}{5} = 3 \times \frac{5}{2} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$ . Denique

$4 : 2\frac{1}{3} = 4 : \frac{7}{3} = 4 \times \frac{3}{7} = \frac{12}{7} = 1\frac{5}{7}$ .

*Schol. III.* Si fractio per quantitatem integram dividatur, idem obtinetur quotus, five per integram fractionis numerator dividitur, five ejusdem denominator per eam multiplicatur. Nam

$\frac{2}{3} : 2 = \frac{2:2}{3} = \frac{1}{3}$ ; &  $\frac{2}{3 \times 2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ .

Est enim univrsim  $\frac{a}{b} : c = \frac{a:c}{b} = \frac{a}{bc}$ .

Dividendo enim numeratorem, per quantitatem integram, aut multiplicando denominatorem fractionis per eandem quantitatem pari modo fractio imminuitur (76.).

## CAPUT II.

### DE FRACTIONIBUS DECIMALIBUS.

91. Fractiones, de quibus hoc capite agendum est, *decimales* dicuntur, eo quod pro denominatore unitatem cum uno, vel pluribus zeris habent; qui tamen denomi-

*Zeiler Elementa.*

E

nator



nator scribi non solet, verum, qualis sit, ex notis numeratoris intelligitur. Tot enim universim præter unitatem zéros denominator complectitur, quot notis numerator constat. Solet vero ejusmodi numerator interjecta virgula ab integris quantitatibus, si quæ præcedunt, distingui. Sin nullæ adfuerint, zerus ante virgulam ponitur, Ex. gr.  $3\frac{5}{10}$  sic exprimitur  $3,5 \cdot \frac{23}{100}$  æquatur  $0,23$ .

De harum igitur fractionum natura, & valore; tum de operationibus circa easdem, & demum de reductione distinctis Sphis differemus.

### §. I.

#### *De Natura, & Valore fractionum decimalium.*

92. Notæ decimales ejus naturæ sunt, ut earum valor a sinistra dextram versus decuplo decrescat, instar numerorum integrorum. Est ex. gr.  $0,5 = \frac{5}{10} : 0,05 = \frac{5}{100} : 0,005 = \frac{5}{1000}$  &c.

Coroll. 1. Hinc quævis nota decimalis denominationem, & valorem a loco, quem occupat, fortitur. Sic  $0,5$  quinque decimas:  $0,05$  quinque centesimas:  $0,005$  quinque millesimas &c. denotat.

Coroll. 2. Ex quo pariter sequitur, notæ cujuscumque decimalis valorem imminui decuplo, centuplo &c. prout unus, duo, vel plures zeri eandem præcedunt; non item, si subsequuntur. Nam  $0,5 : 0,50 : 0,500 :$



0,500 : 0,5000 &c. plane idem dicunt, nempe quinque decimas partes. Quod manifestum cuivis fiet, si dictas decimales per modum fractionum communium scribat; est enim evidens:  $\frac{50}{100} : \frac{500}{1000} : \frac{5000}{10000}$  omnino æquari  $\frac{5}{10} = 0,5$ .

*Coroll. 3.* Si plures notæ decimales habentur, prima semper decimas, altera centesimas, tertia millesimas, & sic porro &c. partes denotabit, ex. gr. 0,3462 dicit 3 decimas, 4 centesimas, 6 millesimas, 2 decies millesimas partes: seu  $0, \frac{3}{10} + \frac{4}{100} + \frac{6}{1000} + \frac{2}{10000}$ .

*Coroll. 4.* Si datæ fractiones ad eundem omnes denominatorem reducuntur, obtinebis  $\frac{3000}{10000} + \frac{400}{10000} + \frac{60}{10000} + \frac{2}{10000}$ ; & addendo  $\frac{3462}{10000} = 0,3462$ . Hinc patet: idem dici, sive seorsim singulas notas decimales: vel omnes simul enuncies.

*Coroll. 5.* Illud etiam facile intelligitur, quantitatem 4,7 majorem esse, quam 4,69: aut etiam majorem, quam 4,699999 &c. Est enim  $4,7 = 4,70 = 4,700000$  (*Coroll. 2.*); jam vero  $4, \frac{70}{100} > 4, \frac{69}{100}$  &  $4, \frac{700000}{1000000} > 4, \frac{699999}{1000000}$ : ergo &c.

*Fractio igitur decimalis altera major est, cujus nota prima alterius notam primam, vel unitate superat, licet altera quocunque notis decimalibus augeatur.*

*Coroll. 6.* Nihilominus 4,6999 propius accedit ad valorem 4,7; quam 4,69; nam



inter 4,6999 & 4,7 differentia  $\frac{1}{10000}$  est; inter 4,69 & 4,7 erit  $\frac{1}{100}$ . Hinc, quo plures notas decimales adjeceris fractioni 4,699 &c. eo propius accedes ad verum valorem alterius majoris 4,7; eum tamen nunquam adæquabis.

*Coroll. 7. Si fractio decimalis sit plurimum notarum, ex. gr. quinque, sex, &c. versus dextram aliquæ sine magno valoris decremento omitti possunt. Sint ex. gr. 2,45267 hexapedæ; rejectis ultimis duabus notis 67, valor imminuitur  $\frac{67}{100000}$  unius hexapedæ, quod decrementum ad sensum plane nullum est.*

*Coroll. 8. Si quæ notæ in fractione decimali omittuntur, atque prima neglectarum quinarium excedit, ultima earum, quæ retinentur, unitate augenda est. In exemplo: si in fractione 0,4864 negligas binas ultimas, scribendum est 0,49. Nam 0,49 propius accedit ad valorem 0,4864, quam 0,48.*

### §. 2.

#### *De operationibus fractionum decimalium.*

93. *Additio, & subtractio iisdem legibus peragitur, queis in numeris integris instituuntur. Id præcipue curandum, ut virgulæ, quibus integræ quantitates a decimalibus separantur, in eadem consistent linea verticali; sic enim fiet, ut & integri*



gri numeri, & decimales notæ singulæ secundum suum valorem localem aliæ infra alias scribantur.

En Exempla! sint addendæ 852, 79,  
 $\div 4, 00745 \div 2, 7 \div 0, 0049;$

|              |                   |   |                        |                          |
|--------------|-------------------|---|------------------------|--------------------------|
| Ita scribe   | 852, 79           | { | Sit                    | 4, 32 — 3, 7865;         |
|              | 4, 00745          |   | hoc ordine numeri col- |                          |
|              | 2, 7              |   | locentur               |                          |
|              | 0, 0049           |   | 4, 3200                |                          |
| <b>Summa</b> | <u>859, 50235</u> | { |                        | <u>3, 7865</u>           |
|              |                   |   |                        | 0, 5335 <i>Residuum.</i> |

94. *Multiplicatio* decimalium nihil differt ab ea, quæ in numeris integris fit; neque ratio habetur positionis virgulæ, nisi postquam producta particularia in unam summam collegeris; tum enim *in producto totali tot versus dextram separantur notæ, quot decimales in utroque factore simul fuerint.*

## EXEMPLUM.

57, 056

*Multiplicandus.*0, 578*Multiplicator.*

32, 978368

*Productum totale.*

*Schol.* Si in producto non tot notæ reperiuntur, quot sunt notæ decimales in utroque factore simul, versus sinistram producto totidem zeri adjungantur, quot requiruntur, ut notæ decimales refecari possint.



Ex. gr. 0,0347

0,0236

2082

1041

694

0,00081892.

95. *In divisione decimalium, quæ iterum nihil peculiare habet, illud solum instar regulæ notandum: in quoto reperto tot versus dexteram notæ interposita virgula separandæ sunt, quot notis fractio dividendi excedit numerum notarum fractionis divisoris. Ratio hujus ex illo axioma petenda est: quotus in divisorem ductus debet restituere dividendum.*

*Coroll. 1. Si numerus decimalium & in dividendo, & in divisore fuerit æqualis; quotus constabit meris integris numeris.*

*Coroll. 2. Si in dividendo vel nullæ, vel pauciores fuerint notæ decimales, quam in divisore; tum dividendo tot zeri instar decimalium a parte dextera adjiciendi erunt, donec numerus earum evadat vel æqualis, vel paulo major numero decimalium in divisore. Tum quotus vel habebit nullas, vel tot præcise decimales, quot juxta regulam supra allatam requiruntur.*

EXEM-



## EXEMPLA.

*Divis. Divid. Quot.      Divis. Divid. Quot.*

3, 2(8, 445) 2, 63.

5, 2(350, 6) 67.

6 4

312

204

386

32

52

192

364

125

22

32

96

29

*Divis. Divid. Quot.*

2, 45(6785, 00) 2769.

490

1885

245

1715

1700

245

1470

2300

245

2205

95

*Schol.* Residua negleximus. Si earum ratio habenda est; vel illa per modum fractionum communium quoto adscribantur; vel addendo zerum ad fractionem decimalem reducantur, methodo seq. Sp̃ho declaranda.



## §. 3.

*De Reductione fractionum communium in decimales, & vicissim.*

96. PROBLEMA I. *Reducere fractionem communem ad decimalem.*

*Resolutio.* Addatur numeratori zerus, tum dividatur per denominatorem; si exhaustur divisio, erit valor in decimalibus exactus; sin minus, magis, ac magis in infinitum ad verum valorem acceditur. Tali modo erit  $\frac{1}{2} = 0,5$ ;  $\frac{3}{4} = 0,75$ ;  $\frac{2}{5} = 0,4$ ;  $\frac{4}{7} = 0,57142857 \&c.$

*Coroll.* Cum residua divisionum sint numeratores fractionem; quarum denominatores sunt divisores; patet, si residuis ejusmodi successive addantur zeri, divisionem continuari posse; & quotos emergentes instar decimalium integris adjungendos esse.

*Schol.* Si series decimalium, in quas fractio communis resolvitur, fiunt infinitæ, illæ post unam, aut plures notas redeunt in se ipsæ. Notæ decimales, post quas series redit in se ipsa, vocantur *Periodus decimalium*; quæ interdum incipit post primam, interdum post 2dam, 3tiam, vel plures notas primæ periodi. Exemplum *seriei infinitæ* in se redeuntis *post unam notam* est  $\frac{1}{3} = 0,333 \&c.$  Post duas notas  $\frac{1}{11} = 0,0909 \&c.$  post sex notas  $\frac{4}{7} = 0,57142857 \&c.$

Si periodus ad primam iterum notam regreditur, dicitur *perfecta*; tales erant periodi supra positæ.



positæ. Si autem ad posteriorem aliquam notam regreditur, *imperfecta* erit. Talis est  $\frac{5}{6} = 0,833 \text{ \&c.}$   
 $\frac{5}{12} = 0,4166.$

97. PROBLEMA II. *Fractiones decimales reducere ad fractiones communes.*

*Resolutio.* Scribantur decimales instar fractionum communium cum suo denominatore, & si fieri potest, reducantur ad minimam expressionem (83.). Ex. gr.  
 $0,75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$ .  $0,625 = \frac{625}{1000} = \frac{5}{8}$  (84. Schol. n. 4<sup>to</sup>.).

98. PROBLEMA III. *Fractionem decimalem reducere ad fractionem communem dati denominatoris.*

*Resolutio.* Ducantur notæ decimales in datum denominatorem, & productum dividatur per denominatorem datæ fractionis decimalis, seu abscindantur in producto versus sinistram tot notæ, quot denominator decimalis zeros habet; demum quoto inde proveniente subscribatur datus denominator, erit nova fractio communis datæ decimali vel omnino, vel proxime æqualis.

Sit enim decimalis fractio 0,6 reducenda ad communem, cujus denominator sit 5; erit primo  $0,6 \times 5 = 0,30$ : dein  $\frac{30}{10} = 3$ ; huic quoto subscribe datum denominatorem 5: prodibit fractio communis  $\frac{3}{5} = 0,6$ .



Si facta divisione residuum manet, istud, si lubet, eadem methodo ad fractionem communem dati denominatoris reduci potest.

*Schol.* Est Problema hoc permagni usus. Dantur v. gr. 3, 21 horæ, id est 3 horæ cum 21 centesimis unius horæ. Quæritur, quot minuta prima, 2da &c. datæ centesimæ efficiant? Cum hora in 60 minuta dividatur; reducatur fractio decimalis ad communem, cujus denominator est 60; obtinebis 3, 21 =  $3 \cdot 12' \cdot 36''$ .

Detur longitudo 0,523. hexaped. quæritur quot pedes, digitos, lineas contineat: Nempe reducatur primo ad fractionem, cujus denominator est 6; (totidem enim pedes hexapeda complectitur) erit  $523 \times 6 = 3138$ , & dividendo per 1000, prodibit 3,138, id est, 3 ped. & 138 millesimæ unius pedis; quas si ad digitos, lineas dicta methodo reduxeris, videbis esse, 0,523

ped. d. lin.

hex. =  $3 \cdot 1 \cdot 7$  &c.



## S E C T I O IV.

DE POTENTIIS, ET RADICIBUS  
QUANTITATUM.

## CAPUT I.

## DE NATURA, ET GENESI POTENTIARUM.

99. **P**otentia, vel *dignitas* quantitatis cuiuspiam est factum, quod oritur, si ea quantitas semel, aut sæpius in se ipsa ducatur. Sic  $a \times a = aa = a^2$  est potentia quantitatis  $a \cdot 5 \times 5 = 25$  est potentia numeri 5.

Si quantitas semel per se ipsa multiplicatur, oritur 2da potentia, seu *quadratum*; si bis, tertia potentia, seu *cubus*, si ter, quarta potentia, seu *quadrato quadratum* &c.

*Coroll. i.* Cum exponentes indicent, quoties quantitas multiplicatione posita, (60. Schol.) seu, ad quam *potentiam*, *dignitatem*, *gradum*, *ordinem* (quæ omnia idem dicunt) sit elevata, *exponens potentia unitate multatus ostendit, quoties quantitas in se ipsam sit ducta.* Ex. gr. exponens 2. dicit, quantitatem semel per se esse multiplicatam seu  $a^2 = a \times a$ . exponens 3 indicat, quan-



quantitatem bis esse per se multiplicatam; seu  $a^3 = a \times a \times a$ . Exponens  $m$  denotat, quantitatem toties esse in se ipsam ductam, quot unitates, una dempta, continentur in  $m$ . Quantitas habens pro exponente (0) æquivalet unitati, seu  $a^0 = 1$ . Si enim  $a^0$  ducatur in  $a^m$ , erit factum  $= a^0 + m$ : atqui hoc non fieret, nisi  $a^0$  sit factor, qui in aliam quantitatem ductus eam nec auget, nec imminuit; seu nisi  $a^0 = 1$ .

*Coroll. 2.* Omnis secunda potentia, seu omne quadratum debet esse *positivum*; oritur enim, si quantitas semel in se ipsam ducitur; siue igitur quantitas fuerit positiva, siue negativa, productum semper erit positivum; seu  $a \times a = a^2$  &  $-a \times -a = a^2$  (67. Reg. IV.) *Cubus* vel positivus, vel negativus esse potest. Quarta vero potentia denuo semper erit positiva, & *universim* potentiæ habentes exponentem parem 2, 4, 6, 8 &c. semper debent esse positivæ. Potentiæ vero habentes exponentem imparem 1, 3, 5, 7 &c. possunt esse & negativæ, & positivæ.

100. PROBLEMA I. *Quantitatem quamvis monomiam algebraicam ad quamcunque potentiam dati exponentis evehere.*

*Resolu-*



*Resolutio.* Multiplicetur exponens quantitatis per exponentem potentiae, & habetur quaesita potentia. Ex. gr. quarta potentia quantitatis  $a^2$  est  $= a^2 \times 4 = a^8$ .  
 $a^m$  elevatum ad potentiam  $n$  est  $= a^{mn}$ .

*Dem.* Quævis potentia monomia potest repræsentari per  $a^m$ . Porro quadratum potentiae  $a^m$  est  $= a^m \times a^m = a^{2m}$ : cubus  $= a^m \times a^m \times a^m = a^{3m}$  (67. Reg. III.) hoc est: exponens quantitatis  $m$  debet multiplicari per exponentem potentiae. Q. E. D.

*Coroll. 1.* Si quantitas monomia pluribus constat literis, cujuslibet literæ exponens multiplicetur per exponentem potentiae quaesitæ. Ex. gr.  $(a^m b^2 c)^2$  est  $= a^{2m} b^4 c^2$ .

*Coroll. 2.* Si quantitati monomiæ, elevandæ ad certam potentiam, præfigitur coefficientis, illum pariter ad eandem potentiam elevari oportet. Ex. gr.  $(3ax^2)^3$  est  $= 27 a^3 x^6$ .

*Coroll. 3.* Si quantitas simplex, seu prima potentia, seu *radix* in se ipsam ducitur, oritur quadratum; si radicem multiplicas per quadratum, obtinebis cubum; si hunc in radicem ducis, orietur quarta potentia, & sic porro. Sic  $a \times a = a^2$ .  $a \times a^2 = a^3$ .  $a \times a^3 = a^4$  &c.

Co-



*Coroll. 4.* Si quantitas fracta ad quamcunque potentiam elevetur, & numeratoris, & denominatoris exponens per exponentem potentiæ multiplicetur. E. g.  $\left(\frac{a^2}{b^m}\right)^3 = \frac{a^6}{b^{3m}}$ .

101. PROBLEMA II. *Quemcunque numerum ad quamcunque potentiam elevare.*

*Resolutio.* Multiplicetur datus numerus toties per se ipsum, quoties hoc indicat exponens potentiæ unitate multatus. Ex. gr. elevetur numerus 18 ad quartam potentiam, erit  $18 \times 18 \times 18 \times 18 = 104976$ .

*Schol.* Verum molestus hic labor est, præsertim, si majores numeri ad potentiam tertiam, quartam &c. elevandi forent. Hinc facilius problema isthoc resolvitur ope logarithmorum, de quibus ad finem agendum erit.

102. PROBLEMA III. *Quantitatem algebraicam binomiam ad quamcunque potentiam elevare.*

*Resolutio.* Quævis binomia quantitas repræsentari potest per  $a + b$ , ducatur jam  $(a + b)$  semel in se ipsum, & erit  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ . Hoc quadratum rursus ducatur in  $(a + b)$ , & erit  $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ; & sic deinceps



ceps continuata operatione omnes successive potentiae adquirentur.

*Coroll.* Constat igitur quadratum binomii 1<sup>mo</sup>. quadrato primae partis: 2<sup>do</sup>. quadrato secundae partis: 3<sup>tio</sup>. duplo facto primae partis in secundam.

Item cubus binomii componitur 1<sup>mo</sup>. cubo primae partis: 2<sup>do</sup>. triplo facto ex quadrato primae partis in secundam; 3<sup>tio</sup>. triplo facto quadrati secundae partis in primam: 4<sup>to</sup>. cubo secundae partis.

*Schol.* Ex formulis generalibus, queis quadratum, & cubus cujusvis quantitatis binomiae repræsentatur, facili negotio quævis alia quantitas binomia ad quadratum, vel cubum elevatur. Sit e. gr.  $(2x - \frac{1}{2}a)$  elevetur ad quadratum; accipe imo quadratum primae partis  $(2x) = 4x^2$ ; tum quadratum secundae partis  $(-\frac{a}{2}) = \frac{a^2}{4}$  denique duplum primae partis  $= 4x$  ductum in secundam  $-\frac{a}{2} = -\frac{4ax}{2} = -2ax$ . habebis  $(2x - \frac{a}{2})^2 = 4x^2 - 2ax + \frac{a^2}{4}$ .

103. PROBLEMA IV. *Quantitatem trinomialam elevare ad quadratum & cubum.*

*Resolutio.* Sit quantitas  $(a + b + c)$  elevanda ad quadratum, vel cubum. Sint duo primi termini tibi instar unius, & quantitas tota instar binomii consideretur; obti-



$$\begin{aligned}
 &\text{obtinebis juxta Problema superius } (a+b+c)^2 = (a+b)^2 + 2(a+b) \times c + c^2 \\
 &= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2; \\
 &\& (a+b+c)^3 = (a+b)^3 + 3(a+b)^2 \times c + 3(a+b) \times c^2 + c^3 = a^3 + 3a^2b \\
 &+ 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c \\
 &+ 3ac^2 + 3bc^2 + c^3.
 \end{aligned}$$

*Schol.* Si quantitas quatuor constat terminis, tres primi instar unius habentur, atque tali modo quodvis polynomium ad quadratum, vel ad cubum elevari potest. Ceterum in quantitatibus complexis sæpe potentiaë solum indicantur, tali modo:  $(2ax + b - c)^2$  vel:  $\sqrt{2ax + b - c^2}$ .

## CAPUT II.

### DE RADICIBUS.

#### §. I.

#### *De Extrahione radicum ex quantitatibus algebraicis.*

104. Quantitas, quæ in se ipsam aliquoties ducta potentiam gignit, *radix* dicitur, seu potentia prima. Et quidem radix comparate ad quadratum, vocatur *quadrata*, respectu cubi *cubica* audit. Sic  $a$  comparate ad  $a^2$  est radix quadrata: comparate ad  $a^3$  est cubica.

105. Si-



105. Signum radices quadratæ est  $\sqrt{\phantom{x}}$ :  
 cubicæ est  $\sqrt[3]{\phantom{x}}$ ; radices indeterminatæ  $\sqrt[n]{\phantom{x}}$ .  
 Quantitas signo radicali  $\sqrt{\phantom{x}}$  inscripta dici-  
 tur *exponens radices*. Sic 3 est exponens ra-  
 dices cubicæ ( $\sqrt[3]{\phantom{x}}$ ). Si nullus numerus,  
 vel litera signo radicali inscribitur, intel-  
 ligitur numerus 2, seu exponens radices  
 quadratæ. Quantitas, cui tale signum præ-  
 figitur, solet dici *quantitas radicalis*. Ex. gr.  
 $\sqrt[3]{a^2 b}$ . & indicat, ex quantitate  $a^2 b$  de-  
 bere extrahi radicem cubicam.

Si ex quantitate complexa, v. gr. ex  
 $a + b$  extrahenda est radix, sic scribitur:  
 $\sqrt{a + b}$ ; vel  $\sqrt{a + b}$ .

106. Radix alia dicitur *rationalis, & vera*,  
 & est, quæ numeris exacte exprimi potest;  
 ex. gr. 3 est radix vera numeri 9. alia *irra-  
 tionalis, seu surda*, quæ numeris exacte expri-  
 mi nequit, licet in lineis geometricis dari  
 queat; talis foret  $\sqrt{8}$ . Denique alia est *ima-  
 ginaria, seu impossibilis*; quæ nec numeris, nec  
 lineis exprimi potest; qualis foret  $\sqrt{-4}$ .

107. *Extrahere radicem* est, e data po-  
 tentia eruere quantitatem, quæ aliquoties  
 in se ducta gignit potentiam. Est ergo ex-  
 tractio radicum contraria elevationi quan-  
 titatum ad potentias: sicut ergo potentia  
 coalescunt multiplicatione, ita suas in ra-  
 dices resolvuntur divisione.



108. PROBLEMA I. *E data potentia monomia radicem quamlibet extrahere.*

*Resolutio.* Dividatur exponent potentiæ per exponentem radicis datæ, & habebitur exponent radicis quæsitæ.

*Dem.* Est enim extrahere radicem, ex data potentia eruere quantitatem, quæ aliquoties in se ducta gignit potentiam: atqui si exponent potentiæ dividatur per exponentem radicis datæ, hoc obtinetur: ergo &c. Sit ex quantitate  $a^4$  extrahenda radix quadrata; seu  $\sqrt{a^4}$ ; fiat  $a^{\frac{4}{2}} = a^2$ ; quæ est ipsa radix quadrata potentiæ  $a^4$ , cum sit  $a^2 \times a^2 = a^4$ .

*Coroll. 1.* Ex dictis patet, quod sequentes expressiones  $\sqrt{a}$ ,  $\sqrt[3]{a}$ ,  $\sqrt[3]{a^2}$ ,  $\sqrt[n]{a^m}$  sint æquales his:  $a^{\frac{1}{2}}$ ,  $a^{\frac{1}{3}}$ ,  $a^{\frac{2}{3}}$ ,  $a^{\frac{m}{n}}$ ; ac proin sibimet invicem substitui possint.

*Coroll. 2.* Porro sequitur, quod quævis quantitas elevata ad fractionem sit radix, habens pro exponente fractionis denominatorem, potentiæ illius, cujus exponent est ejusdem fractionis numerator. Ex. gr.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

*Schol.* Si quantitas monomia coefficientem habet, ex eo pariter radix quæsitæ, si veram habet,







quam in divisorem, seu duplum termini primi, (in allato exemplo erit productum  $6a^3b + 9a^2b^2$ ) & sublatis his productis notetur secundum residuum ( $-4a^2b^2 - 12ab^3 + 4b^4$ ).

IV. Termini duo radices jam inventi pro uno habeantur, perque eorum duplum ( $2a^2 + 6ab$ ) dividatur secundum residuum ( $-4a^2b^2 - 12ab^3 + 4b^4$ ). Quotus inde enatus ( $-2b^2$ ) scribatur pro tertio termino radices. Ducatur dein hic quotus iterum tum in se, tum in totum divisorem, & productum subtrahatur a priori residuo. In dato exemplo potentia penitus exhauritur.

V. Si necdum potentia fuerit exhausta, & radix plures requirat terminos, eadem constanter lege continuetur operatio; dum vel nihil superfit e data potentia; vel abeatur in seriem quandam infinitam.

VI. Si proposita potentia fractio fuerit, per easdem leges extrahatur, radix tum e numeratore, tum ex denominatore.

*Schol. I.* Pro Exercitio hic aliqua exempla adjungam.

I.  $(x^2 - x + \frac{1}{4})$  Radix,  $x - \frac{1}{2}$ .

II.  $(x^2 + 2nx + n^2 - 4x - 4n + 4)$  Radix,  $x + n - 2$ .

III.



$$\text{III. } (9a^2 - 3ac + \frac{c^2}{4} + 3a - \frac{c}{2} + \frac{1}{4}) \text{ Ra-} \\ \text{dix, } 3a - \frac{c}{2} + \frac{1}{2}.$$

$$\text{IV. } (9c^2 - 12cdx + 4d^2x^2 - 24cfy \\ - 16dfxy + 16f^2y^2$$

$$\frac{y^4 + 4y^3 - 8y + 4.}{\text{Radix, } 3c - 2dx + 4fy} \\ y^2 + 2y - 2.$$

*Schol. 2.* Loco demonstrationis serviet, si radix denuo in se ipsam ducta restituit quadratu. n.

110. PROBLEMA III. *Ex data potentia polynomia radicem cubicam extrahere.*

*Resolutio.* Ordinata, ut antea, potentia peragatur operatio sequentibus legibus:

I. E primo potentiae datae termino extrahatur radix cubica (108), scribatur post potentiam; tum cubus ejusdem subtrahatur e data potentia, & notetur residuum.

II. Accipiatur triplum quadratum radice inventae, & per illud dividatur residuum primum potentiae: quotus scribatur pro secundo radice termino. Hic quotus deinde ducatur 1<sup>mo</sup>. in divisorem: 2<sup>do</sup>. triplum ejusdem quadratum ducatur in primum radice terminum: 3<sup>tio</sup>. Idem ipse quotus elevetur ad cubum. Tria isthaec facta ex primo residuo subtrahantur, & notetur, si quod superest, residuum secundum.



III. Duo termini radicis inventi habeantur pro uno, & per triplum quadratum eorumdem summæ dividatur secundum residuum; quotus scribatur pro tertio radicis termino. Reliqua fiunt, ut præcedenti num. II. dictum est. Atque hæc operandi ratio tamdiu continuetur, dum vel nihil superfit, vel iterum abeatur in seriem infinitam.

IV. Si potentia fuerit fractio, per easdem leges extrahatur radix cubica tam ex numeratore, quam ex denominatore.

*Schol.* En Schema aliquod extractionis radicis cubicæ!

Sit potentia  $(8x^6 - 12x^4n + 6x^2n^2 - n^3)$  erit

$(2x^2)$  primus radicis terminus.  
*cub. subtr.*  $- 8x^6$ , manet

*Residuum*  $(- 12x^4n + 6x^2n^2 - n^3)$  hoc  
*Dividendo per*  $(12x^4)$  triplum quadratum radicis inventæ  $(2x^2)$

*Obtinetur*  $(- n)$  secundus radicis terminus.  
*Fiat 1mo.*  $(- 12x^4n)$  factum ex quoto in divisorem.

*2do.*  $6n^2x^2$  triplum quadratum quoti  $(- n)$   
*in primum radicis terminum*  $(2x^2)$ .

*3tio.*  $(- n^3)$  cubus secundi radicis termini:  
*Erit, subtrahendo tria ista facta a residuo superiore,*  
 $(12x^4n - 6n^2x^2 + n^3)$ .

*Residuum*  $= 0$ .

Erit ergo potentiæ datæ radix cubica  $(2x^2 - n)$

*Schol.*



*Schol.* Extractio radicis cubicæ in quantitativibus algebraicis complexis plerumque solum indicatur; nec, quod sciam, in decursu physices unquam in calculis occurrit. Hinc praxin ejusdem paucis indicasse sufficiat.

§. 2.

*De extractione radicum ex numeris.*

III. PROBLEMA I. *E dato quovis numero, ultra duas vel tres notas non assurgente, siquidem quadratum, vel cubus perfectus fuerit extractere radicem quadratam, vel cubicam.*

*Resolutionem dabit sequens tabula, quadrata, & cubos numerorum simplicium continens.*

| I. | II. | III. |
|----|-----|------|
| 1  | 1   | 1    |
| 2  | 4   | 8    |
| 3  | 9   | 27   |
| 4  | 16  | 64   |
| 5  | 25  | 125  |
| 6  | 36  | 216  |
| 7  | 49  | 343  |
| 8  | 64  | 512  |
| 9  | 81  | 729  |



112. PROBLEMA II. *E dato quovis numero, utcunque magno, modo fuerit quadratum perfectum, radicem quadratam extrahere.*

*Resolutio.* I. A dextris inchoando post binas quasvis notas dati numeri inferatur virgula. Tot erunt in radice termini, quot erunt hujusmodi membra virgulis distincta, seu classes, in quas potentia distinguitur. Sinistimum tamen unica nota constare potest.

II. Ex tabula supra posita quæeratur numerus quadratus æqualis vel proxime minor membro illo finistimo datæ potentiæ, & radix scribatur post numerum propositum parenthesi inclusum; elevetur radice prima nota ad quadratum, & subtrahatur a prima classe numeri dati.

III. Ad residuum, si quod datur, ponatur classis sequens, illaque per duplum radice inventæ dividatur. Quotus dabit secundum terminum radice. Hic quotus adjungatur a dextris divisoni, & totum hoc in quotum ipsum ducatur, factumque subtrahatur.

IV. Secundo residuo adjungatur classis tertia e dato numero, & per duplum *totius radice inventæ* denuo dividatur; obtinetur tertia nota radice. Reliqua, ut numero præc. Atque hæc operatio tamdiu repetatur, donec nullum amplius membrum superfit e data potentia.

*Schol.*



*Schol.* Si contingit, ut sequens classis una cum residuo per duplum radicis inventæ, utpote majus dividendo, dividi non possit, (uti in Ildo. exemplo fit) erit proxima radicis nota zerus. Tum vero statim proxima classis priori adjungatur, & de novo instituaturs operatio. Adjungo denuo unum, alterumve Exemplum.

$$\text{I. } \sqrt{(11, 97, 16)} = 346 \text{ Rad.}$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ \hline \text{1 Divis. } 297 \text{ residuum primum cum membro seq.} \\ 64 \\ \hline 256 \\ \hline \text{2 Divis. } 4116 \text{ residuum 2dum cum membro ult.} \\ 686 \\ \hline 4116 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\text{II. } \sqrt{(9, 12, 64, 41)} = 3021 \text{ Rad.}$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ \hline \text{1 Divis. } 012 \text{ resid. 1mum cum membro seq.} \\ 60 \\ \hline 00 \\ \hline \text{2 Divis. } 1264 \text{ residuum 2dum cum membro seq.} \\ 602 \\ \hline 1204 \\ \hline 6041 \text{ resid. 3tium cum membro seq.} \\ 6041 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\text{III. } \sqrt{(25, 20, 04, 00)} = 5020.$$

$$\text{IV. } \sqrt{(36, 30, 06, 25)} = 6025.$$



113. PROBLEMA III. *Radice[m] quadratam ex numero, qui non est perfectum quadratum, per adproximationem extrahere.*

*Resolutio.* Fiat operatio per regulas superiores, dum nullum amplius superfit membrum e proposito numero. Remanebit denique aliquod residuum; huic adjungantur duo zeri, & operatio juxta leges superius datas continuetur tamdiu, donec duas, tres, vel quatuor notas, a præcedentibus per virgulam separatas radici prius inventæ instar decimalium adjeceris; habebis radicem non veram quidem, sed vero quam proximam. En Exempla!

$$\text{I. } \sqrt{(1,48)} = 12,16 \text{ \&c.}$$

$$\begin{array}{r} 48 \\ 22 \\ 44 \\ \hline 04,00 \\ 241 \\ \hline 15900 \\ 2426 \\ 14556 \\ \hline 1344 \end{array}$$

II.  $\sqrt{\phantom{x}}$



II.  $\sqrt{(3,62,54)} = 190,4 \text{ \&c.}$

$$\begin{array}{r} 262 \\ 29 \\ \hline 261 \\ \hline 154 \\ 380 \\ \hline 154,00 \\ 380 \text{ \&c.} \end{array}$$

III.  $\sqrt{(11,90)} = 34,496 \text{ \&c.}$

114. PROBLEMA IV. *Ex numero utcumque magno radicem cubicam extrahere.*

Resolvemus hoc problema commodius in theoria logarithmorum.

## S E C T I O V.

### DE ANALYSI, SEU PROBLEMATUM RESOLUTIONE.

#### C A P U T I.

#### DE RESOLUTIONE PROBLEMATUM PRIMI GRADUS.

##### §. I.

##### *Notiones præviae.*

115. *Analysis* est ars resolvendi per calculum algebraicum problemata, quæ de magnitudinibus proponi possunt.

116. *Problema proponere* est, petere, ut inveniatur valor unius, pluriumve quantitatum



tatum incognitarum. Id autem fieri non potest, nisi dentur rationes quædam incognitarum ad quantitates cognitæ, quæ rationes propterea *data*, seu *conditiones* problematis dici solent; quia ex iis cognoscitur, quibusnam positis conditionibus æqualitas inter nota, & incognita habeatur.

117. Expressio algebraica ejusmodi conditionum vocatur *æquatio*. Unde sequitur, æquationem esse terminos algebraicos, quantitatibus datis, & incognitis constantes, & ex utraque parte signi  $=$  dispositos.

118. Quantitates datæ primis alphabeti literis solent exprimi: *a, b, c* &c. incognitæ postremis *x, y, z* &c.

119. Termini, qui sunt ex sinistra parte signi  $=$  dicuntur *primum membrum* æquationis; qui dextram partem occupant, *membrum secundum* constituunt.

120. *Æquatio* dicitur *primi gradus*, si quantitas incognita est primi gradus; si hæc elevata est ad secundam potentiam, æquatio vocatur *secundi gradus*: qualis hæc est,  $x^2 - ax = b$ ; vel  $ay^2 - y = c$ .

121. *Problema solvere* est invenire valorem singularum quantitatum incognitarum, quæ continentur in problemate; seu etiam ostendere, fieri non posse, ut earum valor determinetur; quod tunc fit, si conditiones problematis contradictionem involvunt.

*Inve-*



*Invenitur autem valor quantitatis incognitæ, fi ea quantitas fola, liberata ab omni alia quantitate in alterutro membro æquationis continetur, in altero vero meræ quantitates cognitæ. Hinc probe notandum, aliud effe valorem alicujus termini exprimi: aliud, valorem inveniri; ut enim valor alicujus termini, feu quantitatis literalis exprimat, fufficit, modo ille ex uno æquationis membro confiftat, ex altero vero fint reliqui termini omnes feu cogniti, feu incogniti; non item, ut valor inveniatur: uti patet ex dictis.*

122. Quare, ut quantitates incognitæ alicujus problematis reperiantur, variæ in æquationibus adhibendæ funt operationes, queis fit, ut incognita a quantitatibus cognitis penitus liberetur, falva membrorum æqualitate.

§. 2.

*De operationibus ad resolutionem problematis primi gradus cum una incognita requisitis.*

123. Operationes, quibus in resolutione problematum, quæ habent unicam incognitam, & funt primi gradus, utimur, funt *transpositio, divifio, & multiplicatio*. Quarum quando quævis adhibenda fit, ut nofcas, hanc regulam tradimus.

Si



Si sit unica quantitas incognita, vel 1<sup>mo</sup>. ea in alterutro membro cum aliis cognitis constituit summam, aut differentiam aliquam, uti  $a + x - b = c$ ; & tum utendum est transpositione: vel 2<sup>do</sup>. incognita est multiplicata per aliam quantitatem cognitam, v. gr.  $a x = b$ ; & adhibenda est divisio: vel 3<sup>tio</sup>. incognita est divisa per quantitatem cognitam, vel ipsa quantitatem cognitam dividit, e. g.  $\frac{ax}{b} = cd$  vel  $\frac{a + b}{x} = c$ , & usum habet multiplicatio.

Verum de singulis his operationibus speciatim agendum erit.

### N. I.

#### De Transpositione.

124. AXIOMA I. Si æqualibus quantitatibus eadem quantitas, vel æquales quantitates addantur; summae erunt æquales.

AXIOMA II. Si ab æqualibus quantitatibus eadem quantitas, vel æquales quantitates subtrahantur, differentiae, vel residua manent æqualia.

125. THEOREMA. Quivis æquationis terminus ex uno membro in alterum transponi potest cum signo contrario, retenta membrorum æqualitate.

Dem. Vel enim terminus, quem transponis, est positivus, vel est negativus: si positivus, eumque mutato signo in alterum æqua-



æquationis membrum rejicis, ab æqualibus duabus quantitatibus eandem quantitatem subtrahis; fi est *negativus*, & in altero membro ponatur cum signo positivo: duabus æqualibus quantitatibus addis eandem quantitatem: ergo in utroque casu manet membrorum æqualitas (axiom.) ergo potest quivis terminus &c.

*Schol.* Est enim evidens, quod, si fuerit  $a + x = c$ , etiam fore  $a + x - a = c - a$ ; proin facta reductione  $x = c - a$ . Item: si  $x - b = a$ ; erit etiam  $b + x - b = a + b$ ; seu  $x = a + b$ .

*Coroll. 1.* Potest igitur transpositionis hæc statui regula: *Terminus ille, qui transponi debet, in membro, in quo occurrit, deleatur, & in altero cum signo contrario scribatur.*

*Coroll. 2.* Ope transpositionis valor cujuslibet termini exprimi potest. Si nempe ceteris transpositis is solus in altero æquationis membro relinquatur.

*Coroll. 3.* Non mutatur æqualitas membrorum, si *omnium* terminorum signa mutantur: sic perinde est, siue scribas  $a - x = b$ , siue  $-a + x = -b$ . Sit enim  $a = 4 : b = 3$ ; in utraque æquatione invenitur ope transpositionis  $x = 1$ . Nam hoc compendio idem præstatur, ac, si omnes omnino termini utriusque membri ex una æquationis parte in alteram mutato signo successive transferrentur.

*Coroll.*



*Coroll. 4.* Ope transpositionis tota æquatio æquari nihilo potest; si scilicet omnes termini æquationis in unum membrum transponantur. Sit  $a + x = c - x$  erit  $a + x - c + x = 0$ .

*Coroll. 5.* Quivis terminus, qui in utroque æquationis membro eodem signo affectus invenitur, retenta æqualitate membrorum utrimque deleri potest. Nam delere utrimque eandem quantitatem positivam, est eandem utrimque subtrahere: delere negativam est eandem addere utrimque, sic loco  $a + x - b = c - b$ , poni potest  $a + x = c$ . Vel si habes  $3a + x = 2a + b$ ; reducendo obtines  $a + x = b$ .

*Schol.* Notandum; si eadem incognita in utroque æquationis membro cum eodem, vel contrario signo inveniatur, ita transponenda est, ut ejusdem valor obtineatur positivus. Ex. gr. sit  $x + a = 3x + b$ . ita transpone:  $3x - x = a - b$ .

## N. II.

### *De Divisione.*

126. AXIOMA. Si æqualia per idem, seu per æqualia dividantur, etiam quoti erunt æquales.

127. THEOREMA. Si unus, aut plures termini in aliqua æquatione multiplicati sunt per eandem quantitatem, hæc quantitas, seu coefficientis in eo, vel iis terminis deleri potest, modo reliqui omnes termini in utroque æquationis membro per eundem coefficientem dividantur.

*Dem*



*Dem.* Tali modo æqualia per idem dividuntur. Nam delere alicujus termini coefficientem, idem eft, ac eundem terminum per datum coefficientem dividere; ergo, fi præterea omnes reliqui termini per eundem coefficientem dividuntur: æqualia per idem dividuntur; ergo manent etiam quoti æquales (axiom.).

*Coroll. 1.* Sit  $bx - ac = bd$ ; erit etiam  $\frac{bx}{b} - \frac{ac}{b} = \frac{bd}{b}$  feu  $x - \frac{ac}{b} = d$ . Item, fi  $2x + 8 = 10$ ; erit quoque  $\frac{2x}{2} + \frac{8}{2} = \frac{10}{2}$ ; feu  $x + 4 = 5$ .

*Coroll. 2.* Efto proin hæc altera regula pro resolutione problematum: *Si quantitas incognita coefficientem habet, deleatur idem, omnesque reliqui æquationis termini per eundem coefficientem dividantur.*

*Coroll. 3.* Quando eadem incognita in pluribus terminis æquationis occurrit, eadem femel fcribatur, & fola quidem; reliqui vero termini per *summam coefficientum* dividantur. Sit ex. gr.  $ax - bx = c$ ; erit quoque  $x = \frac{c}{a-b}$ . Item fit  $ax - x = b$ ; erit quoque  $x = \frac{b}{a-1}$ . Nam ejusmodi quantitates ex. gr.  $(ax - bx)$  constituunt factum, cujus alter factor eft incognita ( $x$ ): alter fumma coefficientium; feu  $ax - bx$



$= x \times a - b$ ; si igitur incognita sola scribitur, & per datam summam coefficientium omnes termini æquationis dividuntur, revera omnes termini æquationis per eandem quantitatem dividuntur, proin manet membrorum æqualitas.

*Coroll. 3.* Quando eadem litera in singulis æquationis terminis occurrit, æquatio simplicior evadet, si per eam literam tota æquatio dividitur. Sit v. gr.  $a b^2 - b x^2 = b d$ ; facta divisione per  $b$ , erit  $a b - x^2 = d$ . Tali modo reducitur  $a^2 c - a^2 = a^2 b d$  ad  $c - 1 = a$ .

N. 3.

*De Multiplicatione.*

128. AXIOMA. Si æqualia per idem, seu per æqualia multiplicantur, facta quoque manent æqualia.

129. THEOREMA. Si unus, aut plures termini, sive in uno duntaxat, sive in utroque æquationis membro per eandem quantitatem divisi sunt; is divisor in eo, vel iis terminis deleri potest, modo reliqui omnes termini per eundem divisorem multiplicentur.

*Dem.* Delere fractionis divisorem idem est, ac fractionem illam per divisorem multiplicare; si proin reliqui termini æquationis

nis



nis per datum diviforem multiplicantur, omnes æquationis termini per eandem quantitatem multiplicantur: ergo manet membrorum æqualitas. (axioma)

*Coroll. 1.* Sic  $a + \frac{x}{b} = d$  mutatur in  $ab + x = bd$ . Item æquatio  $\frac{a}{x} + \frac{x}{b} = abc - bcd$  liberatur a fractionibus, fi omnes termini multiplicentur per  $bx$ ; fit enim tum  $\frac{abx}{x} + \frac{bxx}{b} = abbcx - bbcdx$ ; & facta reductione  $ab + x^2 = ab^2cx - b^2cdx$ .

*Schol.* Si plures occurrant fractiones, & compendio uti velis, quemlibet numeratorem multiplica per factum omnium denominatorum, excepto denominatore proprio. Sit ex. gr.  $\frac{x}{b} + \frac{x}{c} = \frac{x}{f}$ ; erit  $cfx + bfx = bcx$ .

*Coroll. 2.* Tertia ergo regula in resolutione problematum hæc est: Si fractio occurrit, in qua quantitas incognita vel numerator est, vel denominator fractionis; ejusdem denominator deleatur, & per eum omnes reliqui æquationis termini multiplicentur.



## §. 3.

*Methodus resolvendi problemata primi gradus  
cum una incognita.*

130. I. Quando problema solvendum proponitur, ante omnia status quæstionis attente expendatur; videndum, quæ & quot conditiones problematis ponantur. Dein conditiones problemati annexæ per æquationem exprimantur.

II. Quantitates æquales, vel æqualium partes non sunt repræsentandæ per literas diversas, sed per easdem omnino, adhibitis solummodo denominatoribus, vel coefficientibus, si necesse sit. Quare, si in problemate plures occurrant quantitates incognitæ, quarum una est dupla prioris, altera dimidia &c. & prima dicatur  $x$ , erit altera  $2x$ , altera  $\frac{x}{2}$  &c. Eodem modo, si duæ dantur quantitates, quarum differentia ( $d$ ) nota est; si major earum dicitur  $x$ , erit minor  $x - d$ . Si minor denominatur  $x$ , major exprimitur per  $x + d$ .

III. Dispositis rite terminis æquationis, omnium primo tollantur, si quæ adfunt, fractiones (129. Cor. 2.).

IV. Dispiciatur, utrum nulli termini utrimque deleri queant, ut æquatio reddatur simplicior (125. Coroll. 5.).

V. Ope



V. Ope transpositionis disponantur ita termini, ut ex una parte fint meræ cognitæ quantitates, ex altera vero incognitæ.

VI. Liberetur incognita a fuis coefficientibus (127. Cor. 2. & 3.).

VII. Substituantur loco literarum numeri, ut valor quantitatis incognitæ in ipsis numeris clare videatur.

VIII. Inventum valorem incognitæ in prima æquatione loco ipsius incognitæ pōnito, & si quidem conditiones problematis exacte fuerint impletæ; signum est, valorem verum fuisse detectum.

## EXEMPLA.

I. Quidam parens tribus filiis reliquit hæreditatem  $= a$  hac lege, ut secundus filius parte  $b$  plus acquirat ex hæreditate, quam primus, tertius autem tantumdem accipiat, quantum primus, & secundus. Quæritur: *quanta pars unicuique filio ex ea hæreditate obtigerit?*

*Denominationes:* Hæreditas primi filii fit  $x$ . Erit ergo hæreditas secundi  $x + b$ . Tertii  $= x + x + b = 2x + b$ . Hinc stabit hæc æquatio:  $x + x + b + 2x + b = a$ ; seu  $4x + 2b = a$ .

*Transponendo*  $4x = a - 2b$ .

*Dividendo*  $x = \frac{a - 2b}{4}$ .

Sit  $a = 800$   $b = 100$  { erit  $x = \frac{800 - 200}{4} = \frac{600}{4} = 150$ .

Proin primus accepit 150: secundus filius  $150 + 100 = 250$ : tertius  $150 + 250 = 400$ .



II. Quidam parens ætate filium superat numero annorum ( $d$ ); quodsi ætati parentis addas ejusdem dimidium, & præterea quartam partem ætatis filii, pro summa totali prodibit numerus annorum  $= a$ . *Quæritur, quot annorum sit parens, quot filius?*

Sit ætas parentis  $x$ , erit ætas filii  $x - d$  (132. II.)

Dimidia pars ætatis parentis  $= \frac{x}{2}$ .

Pars quarta ætatis filii  $= \frac{x - d}{4}$ .

Juxta conditiones supra positas stabit hæc æquatio:

$$x + \frac{x}{2} + \frac{x - d}{4} = a.$$

Tollendo imam. fractionem  $2x + x + \frac{2x - 2d}{4} = 2a.$

Reducendo  $3x + \frac{x - d}{2} = 2a.$

Tollendo 2dam fractionem  $6x + x - d = 4a.$

Reducendo  $7x - d = 4a.$

Transponendo  $7x = 4a + d.$

Dividendo  $x = \frac{4a + d}{7}.$

Sit  $a = 80$ ;  $d = 30$ ; erit  $x = \frac{320 + 30}{7} = \frac{350}{7} = 50.$

III. *Data summa ( $s$ ) & differentia ( $d$ ) duorum numerorum, invenire ipsos numeros.*

Sit numerus quæsitus major  $x$ ; erit minor  $x - d$ ; dein hic ipse minor numerus æquatur  $s - x$ ; hinc stabit æquatio:  $x - d = s - x.$

Transponendo  $x + x = s + d$ , seu  $2x = s + d.$

Dividendo denique erit  $x = \frac{s + d}{2}.$

Sed



Sed numerus minor eft  $x - d$ ; proin ſubſtituendo erit  $= \frac{s + d}{2} - d = \frac{s + d - 2d}{2} = \frac{s - d}{2}$ .

Coroll. Univerſim ergo, quicumque duo numeri inæquales adſumantur, ſemper erit major  $= \frac{s + d}{2}$  hoc eſt: *Semiſummæ plus ſemidifferen- tia*, & minor  $= \frac{s - d}{2}$  *Semiſummæ minus ſemidifferen- tia*.

IV. Parens quidam hunc in modum filios ſuos hæredes ſcripſit: ut natu maximo obtingat pars hæreditatis  $= a$  cum parte  $n$  reliquæ totius maſſæ. Alteri ætate proxime inferiori tribuantur  $2a$  iterum cum parte  $n$  reſidui. Tertio obtingant  $3a$  pariter cum reſidui parte  $n$ ; & ſic ulterius. Natu demum minimo id remaneat, quod fratrum portionibus ablatis ſuper fuerit. Diſtributa hæreditate compertum eſt, omnes filios in partes æquales ſucceſſiſſe.

Quæritur primo *ſumma hæreditatis*; ſecundo *quantum quiſque filiorum acceperit*: tertio: *quot fuerint filii*?

$$\begin{array}{l} \text{Sit tota hæreditas} = x \\ \text{Numerus creſcens} = a \\ \text{Numerus dividens} = n \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{Portio I. filii} = a + \frac{x - a}{n} \\ \text{Idi. filii} = 2a + \frac{x - a}{n} \\ \text{Idi. filii} = 2a + \frac{x - a}{n} \\ \text{Idi. filii} = 2a + \frac{x - a}{n} \end{array} \right.$$

Cum cujuſque filii eadem ſit portio, ſtabit hæc æqua-  
tio:  $a + \frac{x - a}{n} = 2a + \frac{x - a}{n} = 2a + \frac{x - a}{n} = 2a + \frac{x - a}{n}$



$$\text{Reducendo: } \frac{x-a}{n} = a + x - a - \left( \frac{x-a}{n} \right) - 2a$$

$$\text{Tollendo imam fract. } x - a = a n + x - a - \left( \frac{x-a}{n} \right) - 2a.$$

$$\text{Reducendo: } 0 = a n - \left( \frac{x-a}{n} \right) - 2a.$$

$$\text{Tollendo 2dam fract. } 0 = a n^2 - x + a - 2a n.$$

$$\text{Transponendo: } x = a n^2 - 2a n + a.$$

$$\begin{aligned} \text{Resolv. in factores: } x &= a \times n^2 - 2n + 1 \\ &= a \times n - 1^2 = a \times n - 1 \times n - 1 \\ &\text{hæreditas.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Portio primi filii} &= a + \frac{a n^2 - 2a n + a - a}{n} \\ &= \frac{a n + a n^2 - 2a n + a - a}{n} = \frac{a n^2 - a n}{n} \\ &= a n - a = a \times n - 1. \end{aligned}$$

*Numerus filiorum* habetur dividendo totam massam  $x = a \times n - 1 \times n - 1$  per portionem primi filii  $= a \times n - 1$ . eritque  $= n - 1$ .

Sit jam  $a = 1000$  fl.  $n = 6$ ; erit hæreditas  $= 1000 \times 25 = 25000$  fl.

Portio cujusvis filii  $= 1000 \times 5 = 5000$  fl.

*Numerus filiorum*  $6 - 1 = 5$ .

*Schol.* Exercitii gratia adhuc unum, alterumque exemplum addo:

$$\text{1mum. } a x - \frac{x}{b} + c = d. \quad (x = \frac{bd - bc}{ab - 1})$$

2dum.



2<sup>dum</sup>.  $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + 2 = x. (x = 12.$

3<sup>tium</sup>.  $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = x - c. (x = \frac{a b c}{a b - a - b}.$

§. 4.

*De Operationibus, quæ adhiberi solent in resolutione problematum primi gradus cum pluribus incognitis.*

131. Ut valor quantitatis incognitæ obtineatur, requiritur, ut illa ex una parte æquationis subsistat sola, & liberata ab omni alia quantitate (121); ex altera parte meræ sint cognitæ; istud vero neutiquam obtineri potest, si problema plures continet incognitas, illudque totidem æquationibus exprimatur, quot incognitæ dantur; nisi illæ successive eliminantur, & æquationes demum omnes ad unicam reducantur, quæ unicam solum incognitam in se complectitur. Qua vero ratione illa incognitarum eliminatio, & æquationum reductio ad unicam fieri possit, modo declarandum est.

132. Tres sunt viæ, quibus eliminari successive incognitæ ex æquationibus possunt: 1<sup>mo</sup>. *Substitutione*: 2<sup>do</sup>. *Comparisonem duorum valorum ejusdem incognitæ*: 3<sup>tio</sup>. *Additio-*



ditione, vel subtractione. Agendum de singulis.

N. I.

*De Substitutione.*

133. *Substitutio* tunc fieri dicitur, cum pro quantitate quadam alia æqualis ponitur. Si itaque dantur tot æquationes, quot incognitæ, ut obtineatur æquatio unius incognitæ, reliquis eliminatis: valor cujuscunque incognitæ exprimatur (121). Valor hic expressus substituatur dein pro incognita in æquationibus reliquis; isque labor tamdiu continuetur, donec obtinetur æquatio unius incognitæ, cujus valor jam inveniri potest ex §. præc.

EXEMPLA.

Imum. *Duarum æquationum, & totidem incognitarum.*

$$\begin{array}{l} \text{I. } x + 3y = a \\ \text{II. } 2y - x = b \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x = a - 3y \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Substituatur hic va-} \\ \text{lor de } (x) \text{ in secunda} \end{array}$$

æquatione, & habebitur  
 $2y - a + 3y = b$ ; seu facta reductione, & transpositione

$$5y = a + b; \text{ \& denique } y = \frac{a + b}{5}.$$

Substituatur dein & hic valor quantitatis ( $y$ ) in superiore æquatione ( $x = a - 3y$ ) erit  $x = a - 3 \times$



$$- 3 \times \frac{a+b}{5} = a - \frac{3a+3b}{5}, = \frac{5a-3a-3b}{5} \\ = \frac{2a-3b}{5}.$$

Idem. *Trium æquationum, & totidem incognitarum.*

$$\begin{array}{l} \text{I. } 2x + y + z = a. \\ \text{II. } x + 2y + z = b. \\ \text{III. } x + y + 2z = c. \end{array} \left\{ \begin{array}{l} y = a - 2x - z. \text{ Hic va-} \\ \text{lor substituat in reliquis} \\ \text{duabus æquationibus:} \end{array} \right.$$

$$\text{erit II da. } x + 2a - 4x - 2z + z = b.$$

$$\& \text{ III tia, } x + a - 2x - z + 2z = c.$$

*feu facta re-*

$$\text{ductione } 3x + z = 2a - b.$$

$$x - z = a - c.$$

Quærat jam expressio valoris quantitatis (z) ex priori æquatione, erit  $z = 2a - b - 3x$ .

Hunc valorem in altera æquatione substitue, & prodibit  $x - 2a + b + 3x = a - c$  æquatio unius incognitæ. Facta reductione, & transpositione in hanc abibit:  $4x = 3a - b - c$ ; & denique  $x = \frac{3a - b - c}{4}$ .

Substituatur hic valor in æquatione:  $z = 2a - b - 3x$ : erit  $z = 2a - b - \frac{9a - 3b - 3c}{4}$ ;

feu  $z = \frac{8a - 4b - 9a + 3b + 3c}{4}$ ; feu denique

$$z = \frac{3c - a - b}{4}.$$

Demum substituatur utriusque quantitatis x, & z valor in æquatione  $y = a - 2x - z$ , erit

$$y = a - \frac{6a - 2b - 2c}{4} - \frac{3c - a - b}{4}; \text{ feu}$$

$$y =$$



$$y = \frac{4a - 6a + 2b + 2c - 3c + a + b}{4} ; \text{ seu}$$

$$y = \frac{3b - a - c}{4} . \text{ Proinde positis his conditioni-}$$

$$\text{bus erit } x = \frac{3a - b - c}{4} .$$

$$y = \frac{3b - a - c}{4} .$$

$$z = \frac{3c - a - b}{4} .$$

## N. II.

*De Comparatione duorum valorum.*

134. Determinetur ex singulis æquationibus expressio valoris ejusdem incognitæ. Hi dein valores inter se comparentur, seu æquentur, utpote cum sint ejusdem incognitæ. Sic quidem una incognita eliminabitur; & habebuntur duæ novæ æquationes; cum quibus idem denuo fiat, donec habeatur æquatio unius incognitæ. Repetatur idem calculus pro inveniendis valoribus reliquarum incognitarum, vel substituatur inventus valor in prioribus æquationibus juxta methodum supra indicatam.

## EXEMPLA.

I. *Duarum æquationum, & totidem incognitarum.*

$$\text{I. } x + 3y = a \quad \{ \quad x = a - 3y$$

$$\text{II. } 2y - x = b \quad \{ \quad x = 2y - b$$

$$\text{proin } 2y - b = a - 3y \text{ \& inde } y = \frac{a + b}{5} .$$

Quæ-



Quærendo valoris expreffionem de (*y*) erit

$$\begin{aligned} y &= \frac{a-x}{3} \left\{ \begin{array}{l} \text{proin } \frac{a-x}{3} = \frac{b+x}{2} \\ \text{proin } \frac{b+x}{2} = \frac{a-x}{3} \end{array} \right. \\ y &= \frac{b+x}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Ergo } 2a - 2x = 3b + 3x; \text{ \& } x = \frac{2a - 3b}{5}.$$

## II. *Trium æquationum, & incognitarum.*

$$\begin{aligned} \text{I. } 2x + y + z &= a \\ \text{II. } x + 2y + z &= b \\ \text{III. } x + y + 2z &= c \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} z = a - 2x - y \\ z = b - x - 2y \\ z = c - x - y \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{Valo-} \\ \text{rum ex-} \\ \text{pressio-} \\ \text{nes} \\ \text{quantita-} \\ \text{tis (z).} \end{array} \right.$$

Comparentur primi

$$\begin{aligned} \text{duo valores: } & \left\{ \begin{array}{l} a - 2x - y = b - x - 2y \\ b - x - 2y = c - x - y \end{array} \right. \\ \text{deinde 2dus cum 3tio} & \left\{ \begin{array}{l} a - 2x - y = b - x - 2y \\ b - x - 2y = c - x - y \end{array} \right. \end{aligned}$$

erunt reducti

$$\begin{aligned} b + x &= a + y \\ 2b - x &= 3y + c \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} x = 2b - 3y - c \\ x = a + y - b \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{Valores} \\ \text{quantita-} \\ \text{tis (x)} \end{array} \right.$$

Inter fe comparati dant æquationem unius incognitæ, ( $a + y - b = 2b - 3y - c$ ); quæ denique facta reductione in hanc abit

$$y = \frac{3b - a - c}{4}.$$

Pro inveniendis valoribus quantitatuum *x* & *z* vel repetatur calculus eadem methodo, vel substitutio adhibeatur.

## N. III.

### *De Additione, & Subtractione.*

135. Sublatis fractionibus, siquæ ad-  
sunt, ex datis æquationibus duæ feligan-  
tur



tur eam continentes incognitam, quam velis eliminare. Hæc si in utraque æquatione habuerit idem signum, eundemque coefficientem, subtrahantur ab invicem æquationes: si signa contraria, addantur. Ita proveniet nova æquatio carens hac incognita.

Quodsi incognita in utraque æquatione non habuerit eundem coefficientem, æquatio prima ducatur in coefficientem, quem habet illa incognita in secunda, & vicissim, sic enim fiet, ut utrinque coefficientis sit idem.

### EXEMPLA.

$$I. \quad x + 3y = a$$

$$2y - x = b$$

$$\hline 5y = a + b$$

$$y = \frac{a + b}{5}$$

5

*Addendo delendo (x).*

Si velis (y) eliminare; Imam. æquationem multiplicare debes per 2, & IIdam. per 3; obtinebis

$$2x + 6y = 2a$$

$$6y - 3x = 3b$$

Mutentur signa 2dæ æquationis & eadem jam mutatis signis Imæ. addatur: erit

$$\hline 6y + 3x = -3b$$

$$2x + 6y = 2a$$

$$\hline 5x = 2a - 3b$$

$$x = \frac{2a - 3b}{5}$$

5

*Subtrahendo*

II.



$$\begin{array}{ll} \text{II.} & \text{I. } 2x + y + z = a \\ & \text{II. } x + 2y + z = b \\ & \text{III. } x + y + 2z = c \end{array}$$

Adfumantur primæ duæ æquationes, ut elimine-  
tur ( $x$ ).

Itaque 2dam æquationem multiplica per 2; erit  
ab hac primam fubtrahe,

prodibit æquatio - -

Accipiatur dein 2da, & 3tia æquatio - -

Tertiam a 2da fubtrahendo obtinebitur æquatio -

Adde modo hanc æquationem ad illam fuperiorem

& erit - - -

$$\begin{array}{r} 2x + y + z = a \\ x + 2y + z = b \\ 2x + 4y + 2z = 2b \\ \hline - 2x - y - z = -a \\ \hline 3y + z = 2b - a \\ \hline x + 2y + z = b \\ x + y + 2z = c \\ \hline - x - y - 2z = -c \\ \hline y - z = b - c \\ \hline 3y + z = 2b - a \\ \hline 4y = 3b - a - c \\ \hline \& \quad y = 3b - a - c \end{array}$$

4

Eadem ratione ope additionis, vel fubtractionis valorem quantitatum  $x$ , &  $z$  invenies.

*Schol. 1.* Tres hæ methodi omnes æque generales funt; quæ vero præ altera citius ad finem perducatur in cafu quovis particulari, ufus docebit. Ceterum poterunt eadem promifcue in eodem cafu adhiberi; prout commodius videbitur.

*Schol. 2.* Si plures adfunt incognitæ, quam æquationes, problema erit *indeterminatum*; nec poterit obtineri æquatio unius incognitæ, nifi ab analyfta pro arbitrio ftatuatur valor alicui quantitati incognitæ. Tale foret hoc problema:  
 $x + y = a$ .



## §. 5.

*De Resolutione problematum secundi gradus.*

136. *Æquationes secundi gradus sunt, in quibus exponens maximus incognitæ est = 2. Duplicis autem sunt generis. Nam vel in iis præter cognitas adest incognita cum solo exponente secundæ potentæ; uti in hac:  $x^2 = a b$ . Vel præter incognitam gradus secundi adest eadem gradus primi: ex. gr. in ista æquatione:  $x^2 - 2 a x = b - c$ . Dicamus primo de priori genere æquationum secundi gradus.*

## N. I.

*De resolutione problematum secundi gradus, in quibus incognita occurrit cum solo exponente secundi gradus.*

137. Hujus generis æquationes solvuntur more æquationum primi gradus; nisi, quod ex utroque membro æquationis radix quadrata extrahatur: quod fieri omnino debet, ne tollatur membrorum æqualitas.

## EXEMPLA.

I. Sit  $3 x^2 - 9 = 6$ ; erit  $x^2 = \frac{6+9}{3} = \frac{15}{3} = 5$ ; &  $x = \sqrt{5}$ .

II. Sit ex. gr. hoc problema solvendum: *invenire duos numeros, quorum factum sit = 36; quotus*



quotus vero, fi major dividatur per minorem,  $= 4$ ,

feu fit  $\begin{cases} xy = 36 \\ \frac{x}{y} = 4 \end{cases}$  erit ex 2da æquatione  $x = 4y$ ,

proin substituendo in prima erit,  $4y^2 = 36$ , &  
 $y^2 = \frac{36}{4}$ ; &  $y = \sqrt{\frac{36}{4}} = \frac{6}{2} = 3$ , &  $x$   
 $= 4y = 4 \times 3 = 12$ .

138. Quandoque Problema 2<sup>di</sup>. gradus deprimi poteft ad problema primi gradus. Ex. gr. fit hoc problema propositum:

I. Invenire numerum, a quo, fi auferatur  $\frac{1}{3}$ , &  $\frac{3}{5}$ , & poftea residuum quadretur, habetur ipfe numerus. Sit quæfitus numerus  $= x$ ; erit ergo

$$x - \left( \frac{x}{3} + \frac{3x}{5} \right) = x. \quad \begin{array}{l} \text{Reducantur fractiones ad} \\ \text{eundem denominatorem, \&} \\ \text{addantur, erit} \end{array}$$

$$x - \left( \frac{14x}{15} \right) = x. \quad \begin{array}{l} \text{Reducatur \& } x \text{ ad datum de-} \\ \text{nominatorem:} \end{array}$$

$$\text{erit } \left( \frac{15x - 14x}{15} \right) = x; \text{ seu } \frac{x^2}{(15)^2} = x. \text{ De-}$$

nique dividendo utrumque membrum per  $x$  erit  
 $\frac{x}{225} = 1$ ; &  $x = 225$ . Et profecto, fi hunc

numerum in prima æquatione substituas, invenies conditiones problematis impletas. Est quippe

$$\begin{aligned} 225 - \left( \frac{225}{3} + \frac{675}{5} \right) &= 225 - (75 + 135) \\ &= 225 - 210 = (15)^2 = 225. \end{aligned}$$

II. Quærantur duo numeri, quorum summa fit  $= a$ , & differentia quadratorum  $= b$ . Sit quæfitus



tus numerus major  $= x$ ; minor  $= y$ , stabunt hæ æquationes:  $x + y = a$ .

$$x^2 - y^2 = b.$$

Ex prima æquatione erit  $x = a - y$ . Hunc valorem quadrando, & in altera æquatione substituendo, erit  $a^2 - 2ay + y^2 - y^2 = b$ ; seu  $a^2 - 2ay = b$ ; & transponendo  $\frac{a^2 - b}{2a} = y$ .

## N. II.

*De resolutione problematum secundi gradus, in quibus præter incognitam gradus secundi adest eadem primi gradus,*

139, Tale problema plerumque continebit *quadratum incognitæ incompletum*; solvi igitur non potest, nisi ejusmodi incognitæ quadratum compleatur. Quod qua ratione fieri debeat, sequens problema ostendet.

140. PROBLEMA I. *Complere quadratum incompletum, in quo scilicet quadratum termini secundi desideratur.*

*Resolutio.* In ejusmodi quadrato incompleto, quoniam nonnisi desideratur quadratum termini secundi, præter quadratum primi aderit præterea factum e duplo termini secundi in primum (102. Cor.); quare coefficientis termini primi semper erit duplum termini secundi; adeoque ejus dimidium erit terminus secundus. Hinc, ut compleatur quadratum: accipiat *dimidium coefficientis termini primi, & istud eleve-*  
tur



*tur ad quadratum, & addatur quadrato illi imperfecto, & habebitur quadratum completum.*

EXEMPLA.

I.  $x^2 + ax$

II.  $x^2 + cx - 6x$

III.  $n^2 + \frac{2an}{d} - n$

Incompl.

I.  $x^2 + ax + \frac{a^2}{4}$

II.  $x^2 + cx - 6x + \frac{c^2}{4} - 3c + 9$

III.  $n^2 + \frac{2an}{d} - n + \frac{a^2}{d^2} - \frac{a}{d} + \frac{1}{4}$

Compl.

141. PROBLEMA II. *Resolvere problema-  
ta fecundi gradus, in quibus præter incognitam  
gradus fecundi adest eadem primi gradus.*

*Resolutio.* Præter communes reducendi  
methodos, de quibus fupra, hæ regulæ  
fpeciatiim obfervandæ funt: 1<sup>mo</sup>. Si qua-  
dratum quantitatis incognitæ per cognitam  
multiplicatum fuerit, vel divifum, ante  
omnia liberetur a fuo coefficiente, vel di-  
vifore.

2<sup>do</sup>. Cum nullum quadratum poffit effe  
negativum; fi quadratum incognitæ fue-  
rit negativum, transpofitione fiat pofiti-  
vum.



3<sup>to</sup>. Termini æquationis ita ordinentur, ut primo loco sit quadratum incognitæ, secundo loco omnes illi termini, in quibus comparet incognita, illique omnes pro termino secundo habeantur, termini vero foli cognitæ constantes transponantur in alterum æquationis membrum.

4<sup>to</sup>. Dispiciatur, utrum quadratum sit completum, necne, & si fuerit incompletum, compleatur, & quadratum termini secundi etiam alteri æquationis membro addatur.

5<sup>to</sup>. Extrahatur radix quadrata ex utroque membro.

6<sup>to</sup>. Terminus radice inventæ secundus, qui quantitatem cognitam complectitur, transferatur mutato signi in alterum æquationis membrum.

### EXEMPLA.

$$\text{I. } 2x^2 + 2ax + a^2 = b.$$

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{2} = \frac{b}{2} \quad (\text{reg. 2da.})$$

$$x^2 + ax = \frac{b}{2} - \frac{a^2}{2} \quad (\text{reg. 3tia.})$$

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = \frac{b}{2} - \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} \quad (\text{reg. 4ta.})$$

$$x + \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{b - a^2}{2}} + \frac{a^2}{4} \quad (\text{reg. 5ta.})$$

$$x = \sqrt{\frac{b - a^2}{2}} + \frac{a^2}{4} - \frac{a}{2}.$$



II.  $x^2 - 4x + 4 = a + 4$ . Quia datur quadratum perfectum: *extrahendo radicem* erit  $x - 2 = \sqrt{a + 4}$ . &  $x = \sqrt{a + 4} + 2$ .

III. *Invenire numerum  $x$ , qui additus quadrato suo dat summam 60.*

Seu  $x^2 + x = 60$ .

$$x^2 + x + \frac{1}{4} = 60 + \frac{1}{4} \text{ (reg. 4ta.)}$$

$$x + \frac{1}{2} = \sqrt{60 + \frac{1}{4}} \text{ (reg. 5ta.)}$$

$$x = \sqrt{60 + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{241}{4}} - \frac{1}{2}.$$

IV. *Invenire duos numeros, quorum differentia =  $a$ , & factum =  $b$ ; seu:  $x - y = a$   $\left\{ \begin{array}{l} x = y + a \\ xy = b \end{array} \right.$   $\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{b}{y} \end{array} \right.$*

*Comparando valores:  $y + a = \frac{b}{y}$ .*

*Tollendo fractionem:  $y^2 + ay = b$ .*

*Complendo quadratum:  $y^2 + ay + \frac{a^2}{4} = b + \frac{a^2}{4}$ .*

*Extrahendo radicem:  $y + \frac{a}{2} = \sqrt{b + \frac{a^2}{4}}$ .*

*Transponendo:  $y = \sqrt{b + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2}$ .*

*Proin  $x = a + \sqrt{b + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2}$ .*



## SECTIO VI.

DE COMPARATIONE QUANTITATUM, SEU  
DE RATIONIBUS, PROPORTIONIBUS,  
ET PROGRESSIONIBUS.

## CAPUT I.

## NOTIONES PRÆVIÆ.

142. Comparatur quantitas una cum altera, ut investigetur *ratio*, quam earum inter se magnitudines habent. Cum vero ita inter se comparantur quantitates, aliud quæri nihil potest, nisi, vel quantum una excedat alteram: vel quoties una in altera contineatur.

*Coroll.* Ratio ergo est habitudo duarum quantitarum, quam inter se habent, sive quoad differentiam, sive quoad quotum. Prior illa habitudo duarum quantitarum quoad differentiam est *ratio arithmetica*: posterior illa per quotum expressa dicitur *ratio geometrica*. Illa dein differentia, vel ille quotus dicitur *exponens rationis*.

143. Quævis ratio duobus terminis constat, quorum primus *antecedens* dicitur, utpote qui cum altero comparatur, alter *consequens*, quocum primus comparatur. Isti duo termini scribuntur interposito uno, vel duplici puncto, hoc modo: 3 · 6, vel  
3 : 6.



3 : 6. Si unicum punctum intercedit, expressio nobis denotat rationem arithmetica; si duo puncta distinguunt terminos, geometricam designamus.

144. Perinde quidem est, siue antecedens subtrahatur a consequente, siue vicissim; seu antecedens dividatur per consequentem, siue consequens per antecedentem terminum. Plerumque tamen ponitur (quod & nos constanter ponimus) a termino consequente subtractum iri antecedentem: vel consequentem esse dividendum per antecedentem.

145. Duæ rationes, quæ eundem habent exponentem rationis, dicuntur æquales; & siquidem duæ id genus rationes inter se comparantur, habetur *proportio vel arithmetica, vel geometrica*; prout rationes vel arithmeticæ fuerint, vel geometricæ.

*Coroll.* Est ergo *proportio arithmetica æqualitas duarum rationum arithmeticarum*: & *proportio geometrica æqualitas duarum rationum geometricarum*.

146. Duas rationes arithmeticas æquales conjungere solent duplici interposito puncto; ex. gr. 3 . 6 : 2 . 5. Geometricas quatuor punctis, vel signo æqualitatis (=) conjungunt, hoc modo: 3 : 6 :: 2 : 4; vel 3 : 6 = 2 : 4. Sic vero enunciantur: 3 se habet ad 6 (arithmetice) uti 2 ad 5: vel 3 se habet ad 6 (geometricè) uti 2 ad 4.



147. Proportio vel est continua, vel discreta. *Continua* est, si consequens primæ rationis simul est antecedens secundæ. Ex. gr.  $3 \cdot 6 : 6 \cdot 9$ ; vel  $2 : 4 = 4 : 8$ . *Discreta* illa dicitur, si antecedens secundæ rationis est diversus a consequente primæ rationis. V. gr.  $1 \cdot 3 : 4 \cdot 6$ , vel  $2 : 4 = 3 : 6$ . In ejusmodi proportionione terminus primus, & ultimus dicuntur *extremi*, vel *extrema*: secundus & tertius *medii*, aut *media*. In proportionione continua terminus secundus dici solet *medius proportionalis*. Sic autem exprimi solet proportio continua arithmetica  $\div a \cdot b \cdot c$ ; & geometrica  $\div\div a \cdot b \cdot c$ .

148. Dum plures rationes æquales scribuntur continenter, efformatur *series quantitatum proportionalium*. Siquidem rationes, ex quibus series componitur, tales sunt, & consequens cujusvis rationis præcedentis sit antecedens sequentis, series dicitur *progressio*.

*Coroll.* Est itaque *progressio univrsim series terminorum vel arithmetice, vel geometricæ continue proportionalium*.



C A P U T II.

DE RATIONE, PROPORTIONE, ET PROGRESSIO-  
NE ARITHMETICA.

§. I.

*De Ratione & Proportione arithmetica.*

149. THEOREMA I. *Quævis ratio arithmetica ad unam ex sequentibus formulis revo-  
cari potest:  $a \cdot a \pm d$ ; vel  $b \cdot b \pm d$ ; vel  
 $c \cdot c \pm d$  &c.*

*Dem.* Consequens cujusvis rationis arithmeticæ semper æquatur suo anteceden-  
tenti plus, vel minus differentia, quæ in-  
ter utrumque intercedit; si ergo antece-  
dens sit  $= a$ , & differentia  $= d$ ; erit  
consequens semper  $a \pm d$ , si antecedens  
dicitur  $= b$ , consequens erit  $b \pm d$  &c.

150. THEOREMA II. *Omnis proportio  
arithmetica potest repræsentari hac formula:  
 $a \cdot a \pm d : b \cdot b \pm d$ .*

*Dem.* Quævis arithmetica proportio est  
æqualitas duarum rationum arithmetica-  
rum: atqui hæc formula exprimit duas  
æquales rationes (utpote cum sit utrinque  
idem exponens rationis ( $d$ ), ergo rite ex-  
primit, & repræsentat proportionem arith-  
meticam.



3. Schol. Si fuerit continua proportio, ponitur  
 $b = a + d$ , & æquatur huic  $\div a \cdot a + d \cdot a + 2d$ .

151. THEOREMA III. In quavis proportionem arithmetica summa extremorum est æqualis summæ mediorum.

Dem. Quævis proportio arithmetica rite exprimitur per hanc formulam:  $a \cdot a + d : b \cdot b + d$ ; atqui in hac formula patet, summam extremorum esse æqualem summæ mediorum: ergo &c.

Coroll. 1. In proportionem continua summa extremorum est æqualis duplo termini medii.

3. Coroll. 2. Datis tribus terminis facile invenitur quartus: vel in continua proportionem datis duobus tertius: vel denique datis extremis medius arithmetice proportionalis. Sit enim

1<sup>mo</sup>.  $a \cdot b : c \cdot x$ ; erit  $a + x = b + c$ , proin  
 $x = b + c - a$ .

2<sup>do</sup>.  $\div a \cdot b \cdot x$ ; erit  $a + x = 2b$ , proin  
 $x = 2b - a$ .

3<sup>tio</sup>.  $\div a \cdot x \cdot c$ ; erit  $a + c = 2x$ ; &  
 $x = \frac{a + c}{2}$ .

S. 2.

De Progressione arithmetica.

152. THEOREMA I. Quælibet progressio arithmetica potest exhiberi hac formula:  
 $\div a \cdot a + d \cdot a + 2d \cdot a + 3d \cdot a + 4d$  &c.

Dem.



*Dem.* Hæc formula exprimit seriem terminorum arithmetice continue proportionalium: ergo exhibet progressionem arithmeticam (148.).

*Schol.* In formula utrumque signum  $\pm$  adhibetur, ut pro crescente, & decrescente progressionem ferviat.

153. THEOREMA II. *In omni progressionem arithmetica quivis terminus est æqualis summe ex termino primo, & facto differentie communis in numerum terminorum præcedentium.*

*Dem.* Ex formula generali progressionis. V. gr. terminus quintus est æqualis  $a + 4d$ . & sic de reliquis.

*Coroll.* Sit ergo terminus primus  $= a$ : differentia communis  $= d$ , terminus quæsitus  $= m$ : numerus terminorum præcedentium  $= n - 1$ ; erit  $m = a + d \times n - 1$ .

154. THEOREMA III. *In omni progressionem arithmetica differentia inter terminum primum, & ultimum est æqualis differentie communi ductæ in numerum terminorum unitate multatum.* Ex. gr. sint sex termini progressionis arithmeticæ (ex formula gen.) erit differentia inter  $a$ , &  $a + 5d = d \times 6 - 1 = d \times 5$ .

*Coroll.* Sit terminus primus  $= a$ : ultimus  $= \omega$ : differentia communis  $= d$ , numerus terminorum  $= n$ ; erit  $\omega - a = d \times n - 1 = dn - d$ .



155. THEOREMA IV. Summa totius progressionis arithmetice æquatur summe terminorum primi, & ultimi, multiplicatæ per dimidium numerum terminorum: vel semisumme terminorum primi, & ultimi ductæ in numerum terminorum: seu  $S = a + \omega \times \frac{n}{2} = \frac{a + \omega}{2} \times n$   
 $= \frac{an + \omega n}{2}$ .

Dem. Sit  $\div a \cdot a + d \cdot a + 2d \cdot a + 3d \cdot a + 4d \cdot a + 5d$ ; erit summa omnium terminorum  $= 6a + 15d$ . Jam vero hæc summa æquatur  $a + a + 5d \times 3$ ; vel  $= \frac{2a + 5d}{2} \times 6 = \frac{12a + 30d}{2}$ , uti patet: ergo &c.

Schol. Ope duarum formularum:  $\omega - a = d \times n - 1$ , &  $2s = an + \omega n$ , octo aliæ eruuntur: & quidem ex prima,  $\omega - a = d \times n - 1$  sequentes quatuor

$$\text{I. } a = \omega - dn + d = \omega - d \times n - 1.$$

$$\text{II. } \omega = a + d \times n - 1.$$

$$\text{III. } d = \frac{\omega - a}{n - 1}.$$

$$\text{IV. } n = \frac{\omega - a + d}{d} = 1 + \frac{\omega - a}{d}.$$

Ex altera generali formula  $2s = an + \omega n$  denuo quatuor aliæ derivantur.

$$\text{V. } a =$$



$$\text{V. } a = \frac{2s - \omega n}{n} = \frac{2s}{n} - \omega.$$

$$\text{VI. } \omega = \frac{2s - an}{n} = \frac{2s}{n} - a.$$

$$\text{VII. } n = \frac{2s}{a + \omega}.$$

$$\text{VIII. } s = \frac{a + \omega}{2} \times n.$$

Si in æquatione  $s = \frac{a + \omega}{2} \times n$  substituatur ex formula II. valor  $\omega = a + d \times n - 1$ ; & in eadem æquatione  $s = \frac{a + \omega}{2} \times n$  substituatur ex formula I. valor  $a = \omega - d \times n + 1$ ; & denique, si in superiori æquatione  $s = \frac{a + \omega}{2} \times n$  ex formula IV. ponatur valor  $n = 1 + \frac{\omega - a}{d}$ ; duodecim novæ formulæ prodibunt. Habebuntur ergo universim viginti formulæ, in quibus datis tribus ex his quinque  $a$ ,  $\omega$ ,  $d$ ,  $n$ ,  $s$  inveniri reliqua possunt. Plurimum proderit, si tyrones in eruendis ejusmodi formulis generalibus sese diligenter exercuerint.

156. PROBLEMA. *Inter duos terminos datos invenire numerum in mediorum arithmetice proportionalium, ut progressio oriatur.*

*Resolutio.* Differentia inter datos duos terminos dividatur per  $m + 1$ ; quotiens erit differentia communis terminorum in progressionem quæsitam.

*Dem.*



*Dem.* Sint enim inter  $a$ , &  $a + 5d$  quatuor termini arithmetice proportionales ponendi, obtinebitur differentia communis terminorum  $= +d$ , si differentia inter  $a$ , &  $a + 5d$ , seu  $+5d$  dividatur per  $m + 1$ ; seu per  $4 + 1 = 5$ .

*Schol.* Sint inter 2, & 26, septem termini arithmetice proportionales statuendi, differentia inter datos numeros est  $= 24$ ; dividatur hæc per  $m + 1$ , id est per  $7 + 1 = 8$ ; quotus  $= 3$  dabit communem differentiam. Qua data facile tota series terminorum invenitur scilicet  $\div 2. 5. 8. 11. 14. 17. 20. 23. 26$ .

### CAPUT III.

DE RATIONE, PROPORTIONE, ET PROGRESSIONE GEOMETRICA.

#### §. I.

*De Ratione geometrica.*

157. THEOREMA I. *Quævis ratio geometrica ad sequentem formulam potest reduci:  $a : aq$ , vel  $b : bp$  &c.*

*Dem.* Cum dividendum semper æquetur quoto ducto in divisorem; si divisor, seu antecedens dicatur  $= a$ , & quotus  $= q$ , dividendum, seu consequens rationis debet exprimi per  $aq$ , vel si antecedens fuerit  $b$ , & quotus, seu exponens rationis  $= p$ , consequens erit  $bp$  & sic porro &c.

*Coroll.*



*Coroll.* Omnis ratio geometrica est revera fractio, cujus denominator est antecedens, numerator consequens.

158. Si consequens in suo antecedente adcurate contineatur bis, ter &c. eorum ratio dicitur *dupla*, *tripla* &c. sic 16:4 habet rationem quadruplam. Si vero antecedens aliquoties in suo consequente exacte continetur, ex. gr. bis, ter, quater &c. vocatur ratio *subdupla*, *subtripla* &c. Sic 4:12 habet rationem subtriplam.

159. THEOREMA II. *Si rationis cujusvis tam antecedens, quam consequens terminus per idem multiplicatur, aut dividitur, ratio eadem manet.* Nempe manet idem exponens rationis. Sive enim sit  $a : aq$ ; sive  $an : anq$ ; seu denique  $\frac{a}{n} : \frac{aq}{n}$ ; ubique erit exponens rationis  $= q$ .

160. Si duarum rationum idem est exponens rationis, *similes*, vel *æquales* dicuntur. Tales sunt ex. gr.  $a : aq$ ,  $b : bq$ .

161. Duæ rationes, in quibus idem exponens rationis eodem divisionis ordine obtinetur, consequentis nempe per antecedens, dicuntur *directæ*; sin vero idem exponens rationis in una oritur ex divisione consequentis per antecedens, in altera ex divisione antecedentis per consequens, dicuntur *inversæ*, *reciprocae*, *indirectæ*. Sic  
 $a : aq$ ,



$a:aq$ , &  $b:bq$  sunt duæ rationes directæ;  
 $a:aq$ ,  $bq:b$  sunt reciprocae &c.

*Schol.* Ratio reciproca facile mutatur in directam, mutato duntaxat terminorum ordine, ac antecedente in locum consequentis translato. Vel si alterutrius rationis termini duas in fractiones abeunt, quorum numerator communis aut unitas, aut alia quævis quantitas, denominatores vero ipsi rationis termini fuerint. Sic superiores rationes fient directæ, si scribas  $a:aq$ ,  $b:bq$ ; vel  $a:aq$ ,  $\frac{1}{b} : \frac{1}{bq}$ .

162. Si plurium rationum termini respondententes inter se multiplicantur, i. e. antecedentes per antecedentes, consequentes per consequentes, facta constituunt *rationem compositam*. Ex. gr.  $a:aq$ ,  $b:bp$ ,  $c:cr$ ; erit  $abc:abc pqr$  ratio composita.

*Coroll.* *Exponens rationis compositæ est æqualis factio ex rationum componentium exponentibus.* Est quippe  $pqr = p \times q \times r$ , qui sunt ipsi exponentes rationum componentium.

163. Si rationes componentes sunt similes, seu æquales, ratio composita dicitur *duplicata*, *triplicata* &c. prout duæ, tres, vel plures rationes similes ita componuntur, & *exponens rationis ejusmodi compositæ semper est æqualis potentie exponentis communis*, cujus gradum indicat numerus rationum componentium. Sint  $a:aq$ ,  $b:bq$ ,  $c:cq$ ; erit ratio  $abc:abcq^3$  triplicata, & communis expo-



exponens  $q$  est ejus potentiae, cujus gradum indicat numerus rationum componentium, scilicet tertiae.

164. THEOREMA III. *Ratio duplicata, triplicata &c. est aequalis rationi quadratorum, cuborum &c. quorumvis terminorum, aliquam ex rationibus componentibus constituentium.*  
Sic ex. gr. est  $abc : abcq^3 = a^3 : a^3 q^3 = b^3 : b^3 q^3 = c^3 : c^3 q^3$ . Habent enim omnes eundem exponentem  $q^3$ .

*Coroll.* Quia rationes quadratorum, cuborum &c. Sunt rationes duplicatae, triplicatae, rationes radicum vocantur rationes subduplicatae, subtriplicatae &c. Sic  $a : aq$  est ratio subduplicata rationis  $a^2 : a^2 q^2$ .

§. 2.

*De Proportione geometrica.*

165. THEOREMA I. *Quaevis Proportio geometrica potest reduci ad hanc formulam:  $a : aq = b : bq$ ; vel, si est continua,  $\div a \cdot aq \cdot aq^2$ .*  
Est enim proportio nihil aliud, quam aequalitas duarum rationum; quam hisce formulis exprimi, manifestum est.

*Coroll. 1.* Quaevis proportio geometrica est aequatio. Nam, si fuerit  $a : b = c : d$ , erit etiam  $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$  (156. Cor.) & tollendo



do fractiones  $b c = a d$ . Quare in omni proportionem geometrica factum extremorum est æquale facto mediorum. Id quod etiam, ex solo intuitu formulæ generalis patet.

*Coroll. 2.* Vicissim omnis æquatio resolvi in proportionem potest, ita, ut unius membri factores constituent extremos, factores alterius medios proportionis terminos. Sit enim  $a d = b c$ ; erit  $a : b = c : d$ . Sic etiam  $a^2 = d x$ , in hanc mutatur proportionem:  $a : d = x : a$ .

*Coroll. 3.* Termini proportionis geometricæ toties inter se permutari, ac combinari possunt, quoties productum extremorum manserit æquale producto mediorum.

*Schol.* Mutationes, quas termini proportionis admittunt, potissimum ad sequentes revocantur.

Si fuerit  $a : b = c : d$ , erit

*Invertendo*  $b : a = d : c$ .

*Alternando*  $a : c = b : d$ .

*Permutando*  $d : b = c : a$ .

*Comppnendo*  $\begin{cases} a + b : a = c + d : c. \\ a + b : b = c + d : d. \end{cases}$

*Subtrahendo*  $\begin{cases} a - b : a = c - d : c. \\ a - b : b = c - d : d. \end{cases}$

*Mixtim*  $a + b : a - b = c + d : c - d$ .

*Multipl.*  $\begin{cases} a m : b m = c : d. \\ a n : b = c m : d. \\ a : b m = c : d m. \\ a m : b m = c n : d n. \end{cases}$

*Divid.*



$$\text{Divid.} \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{m} : \frac{b}{m} = c : d. \\ \frac{a}{m} : b = \frac{c}{m} : d. \\ a : \frac{b}{m} = c : \frac{d}{m}. \\ \frac{a}{m} : \frac{b}{m} = \frac{c}{n} : \frac{d}{n}. \end{array} \right.$$

$$\text{Elev. ad pot. } a^m : b^m = c^m : d^m.$$

$$\text{Extrah. rad. } \sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{c} : \sqrt[m]{d}.$$

166. THEOREMA II. Si duarum, vel plurium proportionum antecedentes inter se, & consequentes inter se multiplicantur, vel si antecedentes, & consequentes unius dividantur per antecedentes, & consequentes alterius proportionis, facta, vel quoti etiam erunt proportionales.

Dem. Sint duæ proportionēs  $\left\{ \begin{array}{l} a : aq = b : bq. \\ c : cp = d : dp. \end{array} \right.$   
 Erunt facta - -  $ac : acpq = bd : bdpq.$   
 Et quoti - -  $\frac{a}{c} : \frac{aq}{cp} = \frac{b}{d} : \frac{bq}{dp}.$

Atqui utrinque factum extremorum æquatur facto mediorum: ergo &c.

167. THEOREMA III. Si in duabus proportionibus duo termini sunt communes, reliqui quatuor erunt inter se proportionales; & quidem

Imo. Si consequentes unius æquantur antecedentibus alterius; seu si fuerit  $\frac{a}{b'} : b = c : d$   
 $\frac{b' : e}{b' : e} = d' : f$   
 I 2 erunt



erunt reliqui proportionales DIRECTE, seu, ut dicitur, EX ÆQUO ORDINATO, seu erit  $a:e = c:f$ .

*Dem.* Si datæ rationes componantur, erit  $ab:be = cd:df$ ; ergo dividendo rationem primam per  $b$ , alteram per  $d$ , erit  $a:e = c:f$ .

II<sup>do</sup>. Si in duabus proportionibus termini consequentes fuerint æquales; seu, si fuerit  $a:b = c:d$   $f:b = g:d$  erunt reliqui denuo proportionales EX ÆQUO ORDINATO; seu erit  $a:f = c:g$ .

*Dem.* Si fit  $a:b = c:d$   $f:b = g:d$  erit alternando  $a:c = b:d$   $f:g = b:d$ ; ergo cum duæ rationes sunt tertix æquales, erunt etiam æquales inter se, seu erit  $a:c = f:g$ , seu  $a:f = c:g$ .

III. Si in duabus proportionibus antecedentes primæ rationis, & consequentes secundæ rationis fuerint æquales, reliqui termini erunt reciproce, seu, ut dici solet, EX ÆQUO PERTURBATO proportionales. Seu si  $a:b = c:d$   $a:f = g:d$  erit  $b:f = g:c$ .

*Dem.* Si fiat utrinque factum extremorum, & mediorum, erit  $ad = bc$ , &  $ad = fg$ ; ergo etiam  $bc = fg$ ; proin  $b:f = g:c$ .



IV. Si in duabus proportionibus termini communes in una proportionem constituunt extremos, in altera medios, erunt reliqui denuo ex ÆQUO PERTURBATO proportionales; seu, si  
 $a:b = c:d$   
 $f':a = d:g$  erit  $b:f = g:c$ .

*Dem.* Fiant facta extremorum, & mediorum, & erit  $ad = bc$ ; item  $fg = ad$ ; proin &  $bc = fg$ : ergo  $b:f = g:c$ .

168. THEOREMA IV. In serie rationum similium, seu æqualium erit summa omnium antecedentium ad summam omnium consequentium, ut quivis antecedens ad suum consequentem.

*Dem.* Sit hæc series:  $a:aq = b:bq = c:cq = d:dq$ , erit summa omnium antecedentium  $a + b + c + d$ , & summa omnium consequentium  $aq + bq + cq + dq$   
 $= \overline{a + b + c + d} \times q$ ; atqui evidens est, esse  
 $a + b + c + d : \overline{a + b + c + d} \times q = a:aq$   
 $= b:bq = c:cq$  &c. ergo &c.

§. 3.

*De æqualitate geometrica, seu rationis.*

169. Identitas magnitudinis, quæ est inter unam, & alteram quantitatem, seorsim spectatas, æqualitas arithmetica, sive numerica dicitur; identitas autem rationis, quæ est inter duas ex una, & totidem quantitates ex altera parte, geometricè in-



ter se comparatas, *æqualitas geometrica* nuncupatur. Sint duæ quantitates  $M$ , &  $N$ ; quodsi quantitas  $M$  seorsim spectata tot, nec plures unitates sui generis complectitur, quot unitates sui itidem generis continet quantitas  $N$ , pariter seorsim spectata; erunt quantitates  $M$ , &  $N$  inter se arithmetice æquales, seu  $M = N$ .

Sint rursus duæ quælibet quantitates  $M$ , &  $m$ , item  $N$ , &  $n$ . Si jam duæ quantitates  $M$ , &  $m$  geometricè comparantur, quærendo scilicet earum, quam inter se habent, rationem geometricam; & pari modo etiam inter se comparantur  $N$ , &  $n$ , inveniaturque idem utrinque exponens rationis, seu eadem ratio; hoc est, si fuerit  $M:m = N:n$ ; erunt duæ quantitates  $M$ , &  $m$  duabus aliis  $N$ , &  $n$  geometricè æquales.

170. Solent autem æqualitatem quamlibet geometricam per æquationem exprimere, v. gr. hanc:  $M:m = N:n$ , ita scribunt:  $M = N$ . Quæ formula cum æqualitatem *geometricam* designat, (id quod ex circumstantiis desumendum est) multo aliter accipi debet: quam, ubi eadem æqualitatem arithmeticam denotat. Non enim hoc dicit: quantitatem  $M$  seorsim spectatam æqualem esse quantitati  $N$ , pariter seorsim, & absolute spectatæ; sed istud: rationem, quæ est inter duas quantitates homogeneas  $M$ , &  $m$ , æqualem esse rationi,  
ni,



ni, quæ est inter alias pariter homogeneas quantitates  $N$ , &  $n$ . Et quoniam *ratio geometrica* revera consistit in quoto, qui exsurgit ex divisione consequentis per antecedentem, vel vicissim: singula æquationis membra in ejusmodi æquatione geometrica singulos quotientes designant, eorumque inter se æqualitas interjecto signo  $=$  notatur.

*Coroll. 1. Omnis ergo æquatio geometrica proportionem indicat geometricam.* Unde, si hæ, aut similes formulæ, æqualitatem geometricam indicantes, occurrunt:  $S = T$ .  $S = CT$ .  $C = \frac{1}{T}$  &c. (per  $S$  physici intelligunt spatia percurrenda: per  $T$  tempus: per  $C$  celeritatem &c.), ex hætenus dictis suum singulis sensum assignare, non est difficile. Scilicet  $S = T$  innuit, rationem spatiorum constanter æqualem esse rationi temporum; seu  $S:s = T:t$ . Similiter  $S = CT$  dicit, rationem spatiorum esse æqualem rationi compositæ celeritatum, & temporum: seu  $S:s = CT:ct$ . Denique  $C = \frac{1}{T}$  idem est, ac rationem celeritatum esse æqualem rationi inversæ temporum; seu  $C:c = \frac{1}{T} : \frac{1}{t} = t:T$  &c.

*Coroll. 2. Omnis ergo mutatio, quæ proportionem geometricam non turbat, neque turbat æquationem geometricam.* Possunt igitur



1<sup>mo</sup>. æqualia *substitui* pro æqualibus, 2<sup>do</sup>. potest vel utrumque, vel alterutrum æquationis geometricæ membrum per quamcunque quantitatem multiplicari, vel dividi: 3<sup>tio</sup>. potest utrumque ad eandem potentiam elevari, vel ex utroque eadem radix extrahi, quin æqualitas geometrica turbetur: quia omnes istæ mutationes locum habent in proportionibus geometricis (præc. §.).

*Schol.* Quare si fuerit  $S = T$ , & iterum  $S = C$ ; erit etiam  $C = T$ . 2<sup>do</sup>. Si  $S = VT$ ; erit *multiplicando* per  $V$  pariter  $SV = V^2 T$ . Item *dividendo*  $\frac{S}{V} = \frac{VT}{V} = T$ . Vel *multiplicando*, aut *dividendo alterutrum ex. gr.*  $C = 2T$ ;  $2C = T$ ;  $C = \frac{T}{2}$ ;  $\frac{C}{3} = T$ . 3<sup>tio</sup>. *Elevando utrumque membrum ad eandem potentiam, vel extrahendo radicem quamcunque.*  $C^m = T^m$ ;  $\sqrt[n]{C} : \sqrt[n]{T}$ .

*Coroll. 3.* Si in æquatione geometrica aliquod membrum componitur ex quantitate variabili, & constante, ea, quæ constans est, omitti potest, substituta in ejus locum unitate, ubi necesse fuerit. Nam quantitas constans, sive alteram variabilem dividat, multiplicet: sive ab altera dividatur, multiplicetur, æqualitatem non turbat (Cor. præc.), omitti ergo salva æqualitate univérse potest. Nisi, quod pro illo casu, quo sola est, vel sola per quantitatem variabilem dividitur,



tur, substitui unitas in ejus locum debeat, ad significandam scilicet rationem *æqualitatis* in primo, & rationem *inversam* quantitatis variabilis in altero casu.

*Schol. 1.* Hinc formulæ sequentes:  $S = CT$ ,  $C = \frac{S}{T}$ , facta hypothese, quod  $T$  fit quantitas constans, abeunt in sequentes:  $S = C \cdot C = S$ . Si ponitur  $S$  constans, hanc innuunt formam  $1 = CT$ ,  $C = \frac{1}{T}$ . Ejusmodi expressiones dicuntur *formulæ hypotheticæ*.

*Schol. 2.* Cum experientia teste tyrones in hujusmodi formulis rite pronunciandis hæsitare plerumque soleant, in eorum gratiam varias id genus formulas hoc loco adjiciam, & qua ratione sint pronunciandæ, breviter explico.

1. Si est  $S = C$ , dicitur esse  $S$  in *ratione directa simplici* quantitatis  $C$ .
2. Si  $C = \frac{1}{T}$ , dicitur esse  $C$  in *ratione simplici reciproca* quantitatis  $T$ .
3.  $C = \frac{S}{T}$  dicit:  $C$  est in *ratione composita ex directa  $S$ , & inversa, seu reciproca  $T$ .*
4.  $S = CT$ , hoc est:  $S$  est in *ratione composita directa* quantitatum  $C$ , &  $T$ .
5.  $V = C^2$ : idem dicit, ac  $V$  est in *ratione directa duplicata* quantitatis  $C$ .
6.  $V = \frac{1}{D^2}$  dicit:  $V$  est in *ratione reciproca duplicata* quantitatis  $D$ .



7.  $V = \frac{M}{D^2}$  :  $V$  est in ratione composita ex directa simplici quantitatis  $M$ , & inversa duplicata quantitatis  $D$ .

8.  $T = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{V}}$  innuit:  $T$  esse in ratione composita ex directa subduplicata quantitatis  $S$ , & inversa subduplicata quantitatis  $V$ .

9.  $C = \frac{E^2}{\sqrt{D}}$  id est:  $C$  est in ratione composita ex directa duplicata quantitatis  $E$ , & inversa subduplicata quantitatis  $D$ .

#### §. 4.

*Adplicatio theoriæ de proportionibus geometricis.*

171. In omni proportionem geometrica factum extremorum est æquale facto mediorum (164. Cor.). Hinc notissimum est

PROBLEMA: *dati tribus terminis invenire quartum geometricæ proportionalem.*

*Resolutio duplex est pro duplici casu, qui contingere potest.*

CASUS I. Si termini proportionis sint directe proportionales, seu si sit  $a:b = c:x$ ; tunc erit  $x = \frac{b \cdot c}{a}$ ; seu quartus geometricæ proportionalis erit æqualis facto mediorum diviso per terminum primum.

CASUS



CASUS II. Si termini proportionis sint reciproce proportionales: seu si  $a:b = \frac{1}{c} : \frac{1}{x}$ ; vel  $a:b = x:c$  erit  $x = \frac{a \cdot c}{b}$ ; seu quartus geometricæ proportionalis erit æqualis facto extremorum duorum terminorum, diviso per secundum.

172. PROBLEMA hoc *Regula trium*, vel *aurea* dicitur, scilicet vel a numero terminorum, vel ab insigni usu hoc modo denominata. Est ergo *Regula aurea methodus*, datis tribus terminis inveniendi quartum geometricæ proportionalem; & hæc quidem simplex dicitur; est vero & alia, quam *compositam* vocant, eo quod quinque, aut septem terminis datis incognitus per eam detegendus est.

173. In omni proportionem geometrica binæ dantur rationes, ac proinde termini quatuor; in his bini dicuntur *homogenei*, seu ejusdem generis rem designantes; bini *respondentes*, quorum singuli prioribus singulis respondent. Sic si in proportionem  $A:a = B:b$ , primi duo  $A$ , &  $a$  sunt homogenei, erunt  $B$ , &  $b$  respondentes, ita, ut termino  $A$  sit respondens  $B$ , termino 2<sup>do</sup>  $a$  respondeat quartus  $b$ . Sit hoc problema propositum: *Cursor horis 3 conficit 5 leucas: quot horis conficiet 30 leucas?* 5 & 30 erunt termini homogenei; item 3, &  $x$ . 3 erit respondens termino 5; &  $x$  incognitus respondens termino 30.

Schol.



*Schol.* Maxime naturalis proportionem scribendi modus videtur, si primam rationem constituent duo termini homogenei cogniti, secundam duo termini respondentes pariter homogenei, quorum alter incognitus est, ita, ut tertius primo, quartus incognitus secundo respondeat. Sic problema superius ita pones:  $5:30 = 3:x$ ; qui quidem ordo etiam in ratione reciproca, servari potest, si termini unius rationis fiant denominatores fractionum, quarum numerator est unitas, vel quantitas constans.

174. PROBLEMA I. *Resolvere problemata regulæ aureæ simplicis.*

*Resolutio.* Terminis rite collocatis sedulo attendatur, utrum altera ratio sit prioris directæ, an reciproca. Si primum, erit  $x = \frac{bc}{a}$ ; (Cas. I.) si alterum, erit  $x = \frac{ac}{b}$  (171. Cas. II.).

*Schol.* EXEMPLUM regulæ aureæ directæ præbet problema supra allegatum *de cursore*; nam facile patet, crescente numero leucarum, quas cursor conficere debet, etiam crescere numerum horarum, quibus indiget ad dictas leucas conficiendas; hinc in proportionem  $5:30 = 3:x$ , erit  $x = \frac{30 \times 3}{5} = \frac{90}{5} = 18$ .

EXEMPLUM. Regulæ aureæ indirectæ, seu inversæ sit sequens: *Certa annonæ quantitas sufficit 5 militibus per dies 4. Quot diebus eadem sufficiet 8 militibus?*

Stabit ita proportio:  $5:8 = \frac{1}{4} : \frac{1}{x}$  vel etiam:

5:8



$$5 : 8 = x : 4; \text{ proin erit } x = \frac{5 \times 4}{8} = \frac{20}{8} = 2\frac{1}{2}.$$

175. PROBLEMA II. *Resolvere problemata regulæ aureæ compositæ.*

*Resolutio* pendet ab hoc axioma physici perquam noto: *Effectus sunt proportionales suis causis, ita, ut, si effectus quicumque producat a pluribus causis heterogeneis, id est, diversimode agentibus, ille sit in ratione composita directâ causarum, agentium in ratione directâ, & reciproca causarum, agentium in ratione reciproca.* Sint effectus  $E, e$ ; causæ directæ concurrentes ad effectum producendum  $C, M, N$ ;  $c, m, n$ ; causæ reciproce agentes sint  $F, L$ ;  $f, l$ , erit

$$E : e = \frac{C M N}{F L} : \frac{c m n}{f l}.$$

*Schol.* Vox *causa* hic latius sumitur, nempe pro omni eo, ex quo intelligitur, cur aliquid sit tantum, quantum est, non majus, aut minus, five cur hanc, & non aliam magnitudinis rationem habeat. Pariter *effectus* censetur, cujus magnitudo ab altero tanquam a causa, vel etiam conditione quoquo modo pendet, ac determinatur. Ex. gr. sit notus casus: operarii 3 ad cædendas 35 orgyas ligni indigent diebus 6, si per diem laborant 7 horis; quot diebus indigent operarii 8 ad orgyas 50, si laborent per diem horis 8. In hoc casu *effectus* sunt *dies*, quibus operarii indigent. Relate ad hosce dies, seu ad numerum dierum reliqua sunt instar causarum directæ, vel reciproce agentium; sic numerus orgyarum est causa directæ agens; eo *major* enim dierum numerus erit,



erit, quo *plures* orgyæ cædendæ sunt. Verum numerus operariorum, & horarum, quibus operarii laborant, sunt causæ reciproce agentes relate ad numerum dierum. Nam eo *minor* hic erit, quo *plures* sunt operarii, & quo *pluribus* horis laborant intra diem.

His suppositis Problema superius propositum ita resolvitur:

I. Conferantur singuli termini, five singulæ causæ cum suo effectu, videaturque, quænam earum directe, quænam reciproce concurrat ad effectum producendum.

II. Pro primo rationis primæ termino scribantur illæ causæ, seu conditiones, quæ cum effectu jam cognito connexæ sunt, per modum fractionis, ita, ut causæ directe agentes in sese ductæ constituent numeratorem; causæ reciproce agentes pariter inter se multiplicatæ faciant denominatorem. Secundus terminus primæ rationis sunt illæ causæ, quæ effectui adhuc incognito respondent, eodemque modo scribantur, ut de primo termino dictum fuit. Denique secundæ rationis terminum primum constituat effectus cognitus: ultimum incognitus.

III. Rêducantur, si fieri potest termini cogniti ad simpliciores expressionem.

IV. Demum methodo consueta quantitas incognita  $x$  quæeratur. Sic in priori exemplo oritur hæc proportio:

$$\frac{35}{3 \times 7} : \frac{50}{64} = 6 : x; \text{ seu } \frac{35}{21} : \frac{50}{64} = 6 : x, \text{ seu } \frac{5}{3} : \frac{50}{64} = 6 : x; \text{ seu } \frac{1}{3} : \frac{10}{64} = 6 : x; \text{ seu denique } 64 : 30 = 6 : x. \text{ Hinc } x = \frac{180}{64} = 2 \frac{13}{16}.$$

Schol.



*Schol. 1.* Est methodus hæc resolvendi problemata composita omnino generalissima, & casibus quibuscunque, utut implicatis, adplicari potest, unica simplici operatione.

*Schol. 2.* Confusionis vitandæ gratia scribantur primo termini in duplici serie (ut infra videbis), ita, ut in prima sint termini, qui exprimunt effectum cognitum una cum suis causis annexis; in altera vero serie consistat incognitus effectus pariter cum suis causis, tum primum debito modo in proportionem collocentur. Exercitii gratia, unum & alterum exemplum adjungo. Sint ergo

## EXEMPLA.

I. *Floreni 1500 per annos 6 dant censum 450; ergo Floreni 800 per annos 4 quantum dabunt?*  
*Floreni censum dantes* 1500 : 800  
*Anni* - 6 : 4  
*Census* 450 : x.

Quo plures sunt Floreni, & quo plures anni, per quos illi collocantur, eo major erit census; hinc omnes causæ agunt directæ; proin stabit hæc proportio:  $1500 \times 6 : 800 \times 4 = 450 : x$ ; seu  $9000 : 3200 = 450 : x$ ; vel  $90 : 32 = 450 : x$ ; aut  $9 : 32 = 45 : x$ : Itaque est  $x = \frac{32 \times 45}{9} = \frac{1440}{9} = 160$ .

II. *Sartores 5 singulis diebus laborando 8 horis intra 16 dies præparant 60 tunicas; ergo unus sartor singulis diebus laborando 16 horis tunicas 30 intra quot dies præpararet?*

*Sartores*



|                       |   |                                                                                                                                                               |
|-----------------------|---|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>Sartores</i> 5: 1  | { | Dies erunt per modum effectuum. Quibus numerus sartorum, & horarum, queis per diem laborant, sunt reciproce; contra numerus tunicarum directe proportionales. |
| <i>Horæ</i> 8: 16     |   |                                                                                                                                                               |
| <i>Dies</i> - 16: $x$ |   |                                                                                                                                                               |
| <i>Tunicæ</i> 60: 30  |   |                                                                                                                                                               |

Stat ergo hæc proportio:  $\frac{60}{5 \times 8} : \frac{30}{16}$   
 $= 16 : x$ . Et *reducendo*  $\frac{6}{4} : \frac{15}{8} = 16 : x$ ; vel  
 $\frac{3}{2} : \frac{15}{8} = 16 : x$ , dein *Multiplic.*  $24 : 30 = 16 : x$ ;  
 & iterum *reducendo*  $3 : 30 = 2 : x$ . Hinc erit  
 $x = \frac{30 \times 2}{3} = \frac{60}{3} = 20$ .

*Schol. 3.* Ex dictis facile quoque sequens problema resolvitur: *Tres mercatores lucri gratia contulerunt certam pecuniæ summam, quam dicimus = S; primus contulit partem = a; secundus partem = b, tertius partem = c; est autem lucrum totale = d; quæritur quantum unicuique obveniat ex lucro?* Nempe in hoc casu erit pars lucri totius, quæ singulis debetur, directe proportionalis parti pecuniarum a singulis collatarum; sit primi lucrum =  $x$ ; secundi =  $y$ ; tertii =  $z$ . Stabunt hæc proportionales:  $S : d = a : x$ ; item  $S : d = b : y$ ; demum  $S : d = c : z$ . Atque hæc ipsissima est *regula societatis simplex*; si alia præterea adjuncta habuerit, erit *composita*; verum nil peculiare habet, nisi quod pro quavis symbola particulari debeat accipi quantitas symbolæ multiplicata per id genus *adjunctum* sibi respondens; v. gr. per tempus, quo lucrum fecit &c.



§. 5.

De Progressione geometrica.

176. Progressio geometrica est *series rationum similium*, continuo sibi nexu junctarum, ita, ut consequens prioris rationis sit antecedens posterioris (148. Cor.): ergo, si prima ratio sit  $a : aq$ : altera erit  $aq : aq^2$ , & sic porro, proin quævis progressio geometrica hac generali formula exprimitur:  $\therefore a \cdot aq \cdot aq^2 \cdot aq^3 \cdot aq^4 \cdot aq^5 \&c.$

Schol. 1. Posset hæc progressio continuari etiam citra primum terminum ita  $\therefore \dots aq^{-3} \cdot aq^{-2} \cdot aq^{-1} \cdot aq^0 \cdot aq^1 \cdot aq^2$ . Est enim  $aq^1 : aq^0 = aq^0 : \frac{a^2}{aq} = \frac{a}{q} = aq^{-1}$ . Eodem modo inveniuntur reliqui termini  $aq^{-2} \cdot aq^{-3} \&c.$

Schol. 2.  $aq^0$  loco ( $a$ ) in progressione substitui potest; quia est  $q^0 = 1$  (99. Cor. 1.) Esse vero  $\frac{a}{q} = aq^{-1}$  sic demonstratur: Multiplicetur tota fractio  $\frac{a}{q}$  per  $aq$ , erit factum  $\frac{a^2 q}{aq^2}$ ,

æquale  $\frac{a}{q}$ ; atqui etiam  $\frac{a^2 q}{aq^2} = aq^{-1}$ . ergo

&c. Univerſim quantitas habens exponentem negativum æquatur suo coefficienti diviso per eandem quantitatem exponentis positivi.



*Coroll. 1.* Formula generalis exprimit progressionem *crescentem*, si quotiens communis ( $q$ ) est numerus unitate major, *decrecentem*, si ille minor est unitate.

*Coroll. 2.* Quævis progressio potest crescere ex una parte, & ex altera decrescere in infinitum, uti patet ex formula ultra, & citra terminum  $a$  vel  $a q^0$  continuata.

*Coroll. 3.* Potentiæ alicujus quantitatis naturali numerorum serie progredientes constituunt progressionem geometricam. Fiat in formula  $\div a q^0 \cdot a q^1 \cdot a q^2$  &c.  $a = 1$ , habebitur hæc progressio:  $\div q^0 \cdot q^1 \cdot q^2 \cdot q^3$  &c. Ipsi vero exponentes datæ potentiæ constituunt progressionem arithmeticam.

177. THEOREMA I. Quivis progressionis terminus est æqualis facto ex termino primo ducto in quotientem elevatum ad eam potentiam, cujus exponents designat numerum terminorum præcedentium. Sic ex. gr. in formula generali  $a q^6$  est  $= a \times q$  elevatum ad 6<sup>tam</sup> potentiam; tot enim termini præcedunt. Universim, si terminus progressionis quæsitus sit  $= m$ ; erit  $m = a q^{n-1}$ .

*Coroll.* Dato igitur termino primo, & quotiente rationis inveniri quivis terminus potest. Sit primus  $= 2$ ; quotus  $= 4$ ; erit e. g. terminus tertius  $= 2 \times 4^2 = 2 \times 16 = 32$ .



178. THEOREMA II. In progressionē geometricā quiscunque prior terminus sic se habet ad quēcunque posteriorem, ut primus ad secundum, si horum uterque ad eam potentiam eleuetur, quam indicat duorum illorum distantia mutua. Est enim v. gr.  $a : a q^5 = a^5 : a^5 q^5$ .

Coroll. Est ergo primus ad tertium, ut quadratum primi ad quadratum secundi, primus ad quartum, ut cubus primi ad cubum secundi; seu  $a : a q^2 = a^2 : a^2 q^2 : a : a q^3 = a^3 : a^3 q^3$ . Generatim exhibeant  $a q^m$ , &  $a q^r$  duos terminos quoscunque inter se comparandos; locus, quo alter ab altero distat, sit  $r - m$ ; terminus quivis alius sit  $a q^n$ , & hunc proxime sequens  $a q^{n+1}$ ; semper erit:  $a q^m : a q^r = a^{r-m} q^{nr-nm} : a^{r-m} q^{(n+1)(r-m)}$ .

179. THEOREMA III. In omni progressionē geometricā facta extremorum, & ab extremis æque distantium terminorum sunt inter se æqualia; vel æqualia quadrato termini medii, si numerus terminorum est impar. Sic  $a \times a q^6$  est  $= a q \times a q^5 = a q^2 \times a q^4 = (a q^3)^2$  id est, quadrato termini medii.

180. PROBLEMA. Dato termino primo ( $a$ ), ultimo ( $\omega$ ), & quoto ( $q$ ) invenire summam progressionis geometricæ.



*Resolutio* Cum in progressionē geometrica quivis terminus sit antecedens excepto ultimo, & quivis consequens excepto primo, erit summa terminorum antecedentium  $= s - \omega$ : summa omnium consequentium  $= s - a$ . Est autem  $s - \omega : s - a = a : a q$  (168.) *faciendo factum extremorum*, & mediorum  $a q s - a q \omega = a s - a a$ ; singulos terminos dividendo per  $(a)$  erit  $q s - q \omega = s - a$ ; transponendo  $q s - s = q \omega - a$ ; denique  $s = \frac{q \omega - a}{q - 1}$ . Q. E. I.

*Schol.* Ex hac generali formula:  $q s - s = q \omega - a$  etiam valor reliquorum terminorum,  $q, \omega, a$ , eruitur: scilicet

$$\begin{aligned} a &= q \omega - s \times \frac{1}{q - 1} \\ \omega &= (a + s \times \frac{1}{q - 1}) : q \\ q &= (s - a) : (s - \omega) \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \text{Ceterum eadem fere ratione sexdecim aliae formulae ope substitutionis erui possent, qua illas eruendas esse, supra de progressionē arithmetica diximus.} \end{array} \right.$$

Verum cum hæc haud paulo difficiliora tyronibus videntur, ea hoc loco omittenda esse, putavimus.



SECTIO VII.  
DE LOGARITHMIS.

CAPUT I.

DE NATURA ET CANONE LOGARITHMORUM.

§. I.

*De natura Logarithmorum.*

181. **L**ogarithmi sunt numeri certo artificio compositi, qui, si alias usitatorum loco adhibeantur, omnem multiplicationem in additionem, divisionem in subtractionem mutant. Horum jam naturam, & proprietates paucis examinare juvat.

182. Si quantitas quæpiam ( $a$ ) successive ad eas potentias elevetur, quarum exponentes progressionem arithmetica constituant, erunt ipsæ potentiae in progressionem geometrica. Patet hoc in generali hac formula  $\div a^{-3} \cdot a^{-2} \cdot a^{-1} \cdot a^0 \cdot a^1 \cdot a^2 \cdot a^3$  &c.

*Coroll. 1.* Si progressionis cujusdam geometricæ termini sunt omnes ejusdem numeri potentiae: exponentes erunt in progressionem arithmetica.

*Coroll. 2.* Si duo quivis termini ex hac progressionem multiplicentur, aut dividuntur inter se; *exponens facti* erit æqualis sum-



mæ exponentium, quos habent factores:  
 seu  $a^2 \times a^5 = a^7$ ; *exponens quoti* vero æqua-  
 tur differentiae exponentium dividendi, &  
 divisoris: seu  $\frac{a^5}{a^2} = a^{5-2} = a^3$ .

*Coroll. 3.* Si terminus quispiam hujus  
 progressionis elevetur ad quamcunque po-  
 tentiam, erit *exponens potentiae* æqualis  
 exponenti, quem habet terminus elevan-  
 dus ducto in exponentem potentiae. Sic  
 $(a^2)^2 = a^2 \times 2 = a^4$ .

*Coroll. 4.* Si ex termino progressionis  
 extrahatur radix quaecunque, *exponens ra-*  
*dicis* æquatur quoto, qui oritur, si expo-  
 nens quantitatis, ex qua radix extrahen-  
 da est, dividatur per exponentem radicis.  
 Sic  $\sqrt{a^4} = a^{\frac{4}{2}} = a^2$ .

183. THEOREMA. *Numeri naturales 1. 2. 3.*  
*4. 5. &c. sunt termini, qui constituunt progres-*  
*sionem aliquam geometricam ab unitate tardissi-*  
*me crescentem, & constantem meris potentiis*  
*numeri decimi.*

*Dem.* Sit hæc series:  $\therefore 10^{0,00000000}.$   
 $10^{0,00000001}.$   $10^{0,00000002}.$  - -  $10^{1,00000000}.$  - - -  
 $10^{2,00000000}$  &c. Hæc series 1<sup>mo</sup>. constat  
 meris potentiis numeri decimi, 2<sup>do</sup>. est  
 progressio geometrica (182.) 3<sup>tio</sup>. ab uni-  
 tate ( $10^{0,00000000}$ ) tardissime crescit, ergo  
 4<sup>to</sup>. inter 9999999 terminos progressionis,  
 qui



qui inter 1 & 10 interfunt, erit aliquis quam proxime, aut omnino æqualis 2, & alius 3, item alius 4 &c. ergo numeri naturales &c.

*Coroll.* Quo plures decimales ad exponentem adjeceris, eo tardius potentiæ crescent, eoque propius eorum aliqui ad numeros naturales accedent.

184. DEFINITIO. Logarithmi sunt exponentes potentiarum numeri decimi, ad aliquam progressionem geometricam pertinentium, & quam proxime, aut omnino æqualium numeris naturalibus 1. 2. 3. 4. &c.

*Schol.* Arbitrarium fuit his, qui tabulas logarithmorum condiderunt, quot libet, decimales adjungere. Nonnulli, & qui adcuratissimi fuere, addiderunt decem, imo quindecim. In iis tabulis, quibus passim utimur, septem reperio, quorum etiam postremæ duæ notæ, nisi, ubi summa adcuratio requiritur, in calculo negliguntur.

185. Primæ logarithmi notæ, quæ ante signum decimale consistunt, vocantur *characteristicæ*.

### COROLLARIA.

I. Logarithmus unitatis est 0,0000000, decadis 1,0000000, centesimi numeri 2,0000000. Universe: omnes numeri inter 1 & 10 habent logarithmum unitate mi-



norem, & ii, qui inter 10 & 100 interfunt, habent logarithmum binario minorem &c.

II. Numerus logarithmo respondens tot constat notis, quot unitatibus characteristica unitate aucta constat.

III. *Logarithmus facti* æqualis est summae logarithmorum, quos habent factores. Seu  $l \cdot a b = l \cdot a + l \cdot b$ .

IV. *Logarithmus quoti* æqualis est differentiae logarithmorum dividendi, & divisoris. Seu  $l \cdot \frac{a}{b} = l \cdot a - l \cdot b$ .

V. *Logarithmus potentiae* æqualis est facto ex logarithmo numeri dato, in exponentem potentiae ducto. Seu  $l \cdot a^m = l \cdot a \times m$ .

VI. *Logarithmus radice* cujusvis numeri dati æqualis est quoto logarithmi numeri dati divisi per exponentem radice;

$$\text{seu } l \cdot \sqrt[m]{a^m} = \frac{l \cdot a^m}{m}.$$

VII. Datis logarithmis factorum dantur logarithmi omnium productorum, quæ per eos factores fieri possunt, tum inter se, tum cum inventis productis multiplicatos. Item datis logar. dividendi, & divisoris dantur logar. quoti.

VIII. Dato logarithmo radice datur logarithmus cujusvis potentiae adsignatae, & vicissim dato logarithmo potentiae, & ejus exponente, datur logarithmus radice.

IX. Da-



IX. Datis logarithmis numeratoris, & denominatoris datur logarithmus fractionis. Nam fractio est quotus.

X. Si ad manum sint tabulæ, quæ numerorum naturalium logarithmos, adjectis semper respondentibus numeris exhibent, dabuntur illi numeri, quorum dantur logarithmi, & vicissim datis numeris dabuntur eorum logarithmi. Ac proin hujusmodi tabulæ facillimum reddent, & ab erroris periculo longissime remotum usum multiplicationis, divisionis, extractionis radicum, & elevationis ad quaslibet potentias; maxime, si per numeros majores hæ operationes institui debent. Hinc ope logarithmorum facilis est solutio duplicis problematis, cujus supra num. 101 & 114 mentionem fecimus. Scilicet 1<sup>mo</sup>. *quemcunque numerum ad quamcunque potentiam elevare.* Quæratur logarithmus numeri elevandi ad datam potentiam; ducatur in exponentem potentiæ; habebitur logarithmus potentiæ; huic dein numerus respondens erit ipsa potentia quæsitæ. 2<sup>do</sup>. *Ex quovis numero, utcunque magno radicem cubicam extrahere.* Logarithmus numeri dividatur per exponentem radice; habebitur logarithmus radice; cui respondens numerus dat ipsam radicem.

XI. Nominatim regula trium per logarithmos ita fit; addantur logarithmi me-



diorum terminorum, & a summa auferatur logarithmus primi; residuum erit logarithmus termini quarti quæsit. Seu, si sit  $a : b = c : x$ , erit  $l \cdot x = l \cdot b + l \cdot c - l \cdot a$

## §. 2.

*De Canone Logarithmorum.*

185. PROBLEMA I. *Invenire Logarithmos pro numeris inter 1 & 10 mediis.*

*Resolutio.* Quærantur Logarithmi pro numeris primis 2. 3. 7. &c. 2<sup>do</sup>. Reliqui, quos hi metiuntur, hoc ipso dabuntur. Nam  $2/2 = l4 \cdot l10 - l2 = l5 \cdot l3 + l2 = l6 \cdot l4 + l2 = l8 \cdot 2/3 = l9$ .

Sed enim invenire logarithmos pro numeris primis 2. 3. 7. &c. hoc opus, hic labor erat. Sic, ut logarithmus pro numero 3 inveniretur, 1<sup>mo</sup>. quærendus erat medius geometricæ proportionalis inter 1 & 10  $= 10^{0,50000000}$ ; tum extrahenda radix fuit per adproximationem numeri 10, & inventa est  $= \sqrt{10} = 3,1622777$ . Tum de novo quærendus erat medius geometricæ proportionalis inter  $10^{0,00000000}$  &  $10^{0,50000000}$ ; atque labor iste tamdiu continuandus erat, donec inveniretur aliquis inter proxime minorem, & proxime majorem ternario medius, qui ternarium saltem proxime adæquaret. Repertus est autem post novemdecim extractiones radicum quadratarum



rum  $10^{0,4771213} = 3,0000000 = 3$ . Itaque logarithmus numeri 3 est quam proxime verus  $= 0,4771213$ . Eodem artificio inventus est logarithmus numeri 2  $= 0,3010300$ ; logarithmus vero numeri 7  $= 0,8450980$ .

186. PROBLEMA II. *Invenire logarithmos reliquorum numerorum.*

*Resolutio.* Reliqui numeri aut primi sunt, seu tales, qui nullius alterius, quam unitatis sunt multipli. ex. gr. 1. 2. 3. 7. 11. 13. &c. (31) aut horum, quorum logarithmos invenimus, multipli. de primis supra dictum est; reliquorum logarithmi multo facilius reperiuntur. Ex. gr. Logar. numerorum 20, 30, 40 &c. qui sunt unius e primis decem (quorum logarithmi habentur) decupla, obtinentur, si logarithmi numerorum 2, 3, 4 &c. augeantur unitate, quæ characteristica adcreseat. Est nim  $l\ 20 = l\ 2 + l\ 10$ . &c. Quodsi ergo characteristicas horum logarithmorum binis, aut tribus &c. unitatibus augeas, habebis logarithmos numerorum 200, 300 -- 2000, 3000 &c. Universe verum est: cuiuscunque numeri logarithmus una, duabus &c. unitatibus in characteristica auctus, vel imminutus exhibet logarithmum, ejus numeri multiplicati, vel divisi per 10, 100 &c.

Reliquorum numerorum logarithmi, non primorum, reperiuntur addendo logarith-



garithmos factorum. Sic  $l\ 12 = l\ 2 + l\ 6$ .  
& sic porro.

*Schol.* Ex dictis patet, quam enormem laborem susceperint, insigni posterorum commodo, qui primi tabulas condidere. Horum primus fuit Joan. Neperus; dehinc tabulas amplissimas construxit Andr. Vlaccus, quibus centum omnino logarithmorum Chiliades, seu 100000 complexus est. Sed hæc satis vastum volumen conficiunt, nec omnibus ad manum sunt. Utiliores ad 10000 porriguntur. Novissimas & ceteris multo exactiores tabulas paucis abhinc annis edidit Georg. Vega. Præterea logarithmi fractionum in nullis tabulis continentur. Quare necesse est, praxin discere, qua & logarithmos reperias pro numeris, qui in tabulis non sunt; & numeros pro logarithmis, qui inter logarithmos tabulares non continentur. Primo ergo quæramus logarithmos pro numeris; tum numeros pro logarithmis.

## CAPUT II.

### DE USU LOGARITHMORUM.

#### §. I.

*Dato numero invenire ejusdem Logarithmum.*

187. PROBLEMA I. *Invenire logarithmum pro numero dato, & integro, qui in tabulis reperitur.*

*Resolutio.* Quære numerum in tabulis; ex latere invenies logarithmum respondentem.

188. PROBLEMA II. *Invenire logarithmum pro numero integro, qui maximum tabularum superat.*

*Reso-*



*Resolutio.* 1<sup>mo</sup>. Si numerus datus noscatur esse compositus, & componentes sint in tabulis; erit summa logarithmorum componentibus respondentium logarithmus numeri dati.

2<sup>do</sup>. Si numerus datus excedat aliquem tabularum aliquot zeris solummodo, ut 330900, quæritur logarithmus in tabulis pro 3309 eique additur log. pro 100, vel 1000 &c. si tribus superaret tabularem zeris.

*Schol.* Inveniuntur id genus componentes, dividendo identidem datum numerum per 2, 3 &c. Quos divisores utrum admittat, facile videtur. Ubi continuatis hujusmodi divisionibus ventum erit ad quotum, qui est in tabulis, erit hic unus factor, alter erit factum ex omnibus divisoribus. Ex. gr. Numerus (56136) admittit divisores 3, 2, 2, 2. Itaque ejus componentes erunt  $3 \times 2 \times 2 \times 2 = 24$ , & 2339, qui est ultimus quotus.

3<sup>tio</sup>. Si aliis numeris excedat (uti hic 345232) qui numerum 3452 qui adhuc in tabulis est, excedit duabus notis 32). Quæritur logarithmus pro 3452, 32, & postea addatur logarithmus num. 100; id est, augeatur duabus notis characteristica (186); habebitur logarithmus numeri 34532.

189. PROBLEMA III. *Invenire logarithmum pro numero integro, qui in tabulis est, habente adjunctam fractionem decimalem. Duplex casus notari debet.*

CASUS



CASUS I. Si integer, & decimales per modum unius numeri integri spectatæ excedunt maximum tabularum.

Resolutio. 1<sup>mo</sup>. Sumatur logarithmus pro integro; 2<sup>do</sup>. is subtrahatur a logarithmo numeri sequentis, qui unitate numerum priorem excedit.

3<sup>tio</sup>. Tum fiat: uti differentia numerorum  $= 1$  ad differentiam numeri integri reperti in tabulis, & numeri dati, quæ est ex hyp. fractio decimalis; ita differentia logarithmorum pro duobus numeris tabularibus, unitate distantibus ad differentiam logarithmorum numeri tabularis proxime minoris, & numeri dati.

4<sup>to</sup>. Hæc differentia addatur ad logarithmum integri dati; summa erit logarithmus numeri dati habentis annexam fractionem decimalem.

### EXEMPLUM.

Quæraturs logarithmus pro 3402,32. Est primo log. numeri 3452  $= 3,5380708$ . Secundo. Differentia hujus, & proxime sequentis est 1258

$= ,0001258$ . Tertio. Est  $1 : \frac{32}{100} = \frac{1258}{10000000} : x$

Itaque  $x = \frac{40256}{1000000000} = ,000040256$ . Quarto.

Hæc differentia addatur ad logarithmum numeri 3452, dabit logarithmum quæsitum 3,538111056; cujus ultimæ duæ notæ tuto negligi possunt; quia satis est, septem decimales ponere.

In



*In praxi* multiplicantur decimales adjunctæ per differentiam logarithmorum pro numeris unitate distantibus, & ex producto abscinduntur tot notæ posteriores, quot decimales sunt numero dato adjunctæ; reliquum additur logarithmo integri numeri dati in fine. In exemplo præfenti  $32 \times 1258 = 40256 = 402$ . Itaque

$$\begin{array}{r} 3,5380708 \\ + 0000402 \\ \hline = 3,5381110. \end{array}$$

*Coroll.* Erit ergo logarithmus numeri integri  $345232 = 5,5381110$  (probl. præc.).

CASUS II. Si integer cum decimalibus per modum unius numeri integri spectatus non excedit maximum tabularum.

*Resolutio.* Inveniatur log. pro 35, 62. quæeratur 1<sup>mo</sup>. logarith. tab. pro 3562 = 3,5516939. 2<sup>do</sup>. ab hoc subtrahatur logarithmus numeri 100, tot scilicet habentis post unitatem zeros, quot datæ sunt decimales; id est, characteristica tot unitatibus minuatur, quot datæ sunt decimales. Residuum est log. quæsitus numeri 35, 62.

*Dem.* Est  $35,62 = \frac{3562}{100}$ ; ergo  $\log. 3562 - \log. 100 = \log. 35,62$ .

190. PROBLEMA IV. Invenire logarithmum pro numero integro, habente annexam fractionem communem.

*Resolutio.* Reducantur omnia ad unam fractionem (80); tum logarithmus denominatoris subtrahatur a logarithmo numeratoris, residuum est logarithmus quæsitus.

EXEM-



EXEMPLUM.  $L.\left(42 + \frac{3}{7}\right) = L.\frac{297}{7} = L.297$   
 $- L.7 = 2,47276 - 0,84510 = 1,62766.$

191. PROBLEMA V. *Invenire logarithmum fractionis propriae.*

*Resolutio.* Sit inveniendus log. hujus fractionis  $\frac{4}{7}$ ; subtrahatur logarithmus denominatoris ex logarithmo numeratoris, residuum erit logarithmus fractionis; quem negativum fieri debere, patet. Sic  $l\frac{4}{7} = l4 - l7 = 0,60206 - 0,84510 = -0,24304.$

*Schol.* Hæc quidem resolutio bona est, & vera; sed in praxi multo commodior est methodus Cailliana, quæ sequitur.

*Resolutio Cailliana.* Characteristicæ logarithmi numeratoris addantur 10 (si fractio haberet partes minores centies millionesimis, quarum ratio esset habenda, 100 addi deberent) tum ab eo logarithmo subtrahatur logarithmus denominatoris; residuum est logarithmus numeri, qui si dividatur per unitatem, quam 10 zeri sequuntur, dabit fractionem decimalem, quam proxime æqualem datæ.

EXEMPLUM. Sit quærendus log. fractionis  $\frac{4}{7}$ ; ad logarithmum numeri 4  $= 0,60206$  adde 10 in characteristica; tum a logarithmo 10,60206 subtrahe log. numeri 7  $= 0,84510$ ; restabit log. 9,75696 numeri dividendi per 1 cum 10 zeri.

*Dem.* Si ad characteristicam numeratoris addantur 10, habetur logarithmus numerica-



meratoris multiplicati per 1000000000000. Si dein ex eo subtrahatur logar. denominatoris, habetur log. quoti, seu fractionis multiplicatæ per 1000000000000. Quare, si numerus huic logarithmo respondens iterum dividitur per 1000000000000, habebitur verus valor fractionis.

*Schol.* Ejusmodi logarithmos, quorum characteristica 10, 100 &c. unitatibus augetur, vocat Caillius *hypotheticos*. Dicunt nempe quasi tace: si log. unitatis, qui in tabulis ponitur  $= 0$ , foret  $= 10$ ; tunc log. præsens foret log. verus numeri dati.

## §. 2.

*Dato logarithmo invenire numerum respondentem.*

192. PROBLEMA I. *Invenire numerum respondentem logarithmo dato.*

*Resolutio* I<sup>mo</sup>. Si logarithmus exacte reperitur in tabulis, habetur ad latus numerus respondens.

II<sup>do</sup>. Si logarithmus sola characteristica differat ab aliquo, qui est in tabulis, capiat numerus ei respondens, eique tot in fine adjiciantur zeri, quot unitatibus major est characteristica logarithmi dati, quam characteristica log. tabularis.

III<sup>tio</sup>. Si logarithmus datus non sola characteristica differat a tabulari, evidens est, ei respondere numerum integrum cum fra-



cto. Ut hic inveniatur 1<sup>mo</sup>. quærat<sup>r</sup> log. dato proxime par inter logarithmos maximos tabularum (quia inter hos minores sunt differentiæ; adeoque facilius invenitur, qui dato sit proxime par) neglecta interim characteristica; sumaturque numerus ad latus respondens. 2<sup>do</sup>. Subtrahatur characteristica logarithmi dati a characteristica log. tabularis. 3<sup>tio</sup>. Abscindantur ex numero invento tot decimales, quot unitatibus constat differentia characteristarum.

EXEMPLUM. Quærat<sup>r</sup> numerus respondens logarithmo 0,98613. Invenietur in tabulis log. 3,98614 dato quam proxime par; cui respondet numerus ex latere: 9686. Quare cum differentia characteristarum fit = 3; abscindendæ ex numero invento tres notæ decimales; erit proin numerus quæsitus, quam proxime = 9,686.

*Dem.* Sit numerus respondens logarithmo dato:  $0,98613 = x$ ; erit  $3,98613$  log. numeri  $x \times 1000$ : atqui  $\log. 3,98613$  est quam proxime logarithmus numeri 9686: ergo  $x \times 1000 = 9686$ : ergo  $x = \frac{9686}{1000} = 9,686$ .

*Coroll.* Si characteristica logarithmi dati excedit illam logarithmi tabularis, totidem zeri ad numerum addantur, quot differentia logarithmorum unitatibus constat. Itaque logarithmo 5,98613 respondebit numerus proxime 968600.

*Schol.*



*Schol.* Si differentia etiam logarithmorum, tabularis, & dati ratio habenda videtur, utendum regula aurea, dicendo: uti differentia logarithmi tabularis, & proximi unitate distantis ad differentiam logarithmorum, tabularis, & dati; ita 1 ad differentiam addendam, vel subtrahendam numero respondentem logarithmo tabulari.

193. PROBLEMA II. *Invenire fractionem decimalem pro logarithmo dato, quem ad fractionem pertinere alias constat secundum modum Caillii.*

*Resolutio.* Sit invenienda fractio decimalis, respondens logarithmo 9,75696. Quære inter maximos tabularum logarithmum proxime parem dato, qui est 3,75694. Cui respondet ex latere numerus 5714. Itaque per præc. probl. erit numerus log. dato respondens proxime = 5714000000. Hic jam numerus secundum dicta superius dividendus per 10000000000 dabit numerum quæsitum =  $\frac{5714000000}{10000000000} = \frac{5714}{10000} = 0,5714$ . Et vero, si data fractio  $\frac{4}{7}$  resolvatur in decimales, prodibunt hæ ipsæ 0,5714.

Si datus fuisset log. 5,41867; numerus respondens proxime foret 262200. Qui divisus per 10000000000 dat  $\frac{2622}{10000000000} = 0,00002622$ .

*Coroll.* Adparet ergo, tot universe zéros numero in tabulis reperto addi sub initium debere, quot unitatibus characteristica logarithmi dati



*dati deficit a 9.* Sic logarithmo 3,29746 respondet fractio  $= 0,0000001984$ . Sit enim characteristica  $= c$ ; erit numerus notarum in eo numero, qui logarithmo respondet,  $= c + 1$ . Porro numerus zerorum decimalium unitatem præfixam habentium, qui sunt instar divisoris, est  $= 10$ , & huic numero debet supra in numeratore respondere numerus notarum decimalium; qui univèrse erit vel major, vel minor quam  $c + 1$  quantitate  $x$ . Itaque erit:  $c + 1 + x = 10$ ; & hinc  $x = 10 - c - 1$ ,  $= 9 - c$ : id est, numerus zerorum præfigendorum decimalibus est æqualis differentię novenarii supra characteristicam. Quare, si characteristica superaret 9, non tantum nullus sub initium zerus addi deberet; sed etiam totidem notæ primæ separandæ pro integris forent, quot unitatibus characteristica superaret 9; reliquis solum pro decimalibus servituris. Itaque logarithmo: 11,29746 respondebit numerus: 19,84. Si tamen constat, logarithmum datum ad fractiones pertinere.

*Schol.* His præmissis, & rite intellectis ope, logarithmorum hypotheticorum sequentia problemata facile resolvuntur.

I. *Fractionem per fractionem multiplicare.*

*Resolutio.* Addantur logarithmi numeratorum, & denominatorum. 2<sup>do</sup>. Summæ logarithmorum numeratorum augeantur 10, vel 100 unitatibus in characteristica.



ctica. 3<sup>to</sup>. Subtrahatur summa log. denominatorum; residuum dabit log. facti pertinens ad fractionem.

EXEMPLUM. Sit  $\frac{4}{7} \times \frac{3}{8}$  erit  $l. 4 + l. 3 = 1,07918$ . Item  $l. 7 + l. 8 = 1,74819$ . Augeatur prior decade; seu sit 11,07918 & alter a priore subtrahatur

9,33099 *Residuum,*

cui proxime respondet fractio 0,2143.

*Schol.* Si fractiones datæ, vel earum una sit decimalis, prius reducantur ad communes. Tum eadem his conveniet methodus, quæ communibus.

## II. Fractionem per fractionem dividere.

*Resolutio.* Fractio dividens invertatur, tum secundum problema præcedens, multiplicentur inter se.

EXEMPLUM. Sit  $0,2143 : \frac{3}{8} = \frac{2143}{10000} : \frac{3}{8}$   
 $= \frac{2143}{10000} \times \frac{8}{3}$ ; erit  $l. 2143 + l. 8 = 4,23411$ ,  
 &  $l. 10000 + l. 3 = 4,47712$ , qui, quia major priore est, prioris characteristica augeatur decade; tum fiat  $14,23411 - 4,47712 = 9,75699 = 0,5715 =$  quam proxime  $\frac{4}{7}$ .

## III. Fractionem quamlibet elevare ad quamcunque potentiam.

*Resolutio.* Logarithmi tam numeratoris, quam denominatoris multiplicentur per exponentem potentiae. 2<sup>do</sup>. Augeatur characteristica numeratoris 10, vel 100; ut res  
L 3                      feret.



feret. 3<sup>tio</sup>. Subtrahatur logarithmus denominatoris a logarithmo numeratoris; residuum erit logarithmus potentiae quaesitae fractionis.

EXEMPLUM. Elevetur  $0,17 = \frac{17}{100}$  ad quintam potentiam. Erit  $l. 17 \times 5 = 1,2304489 \times 5 = 6,1522445$ . Item  $l. 100 \times 5 = 10,0000000$ ; itaque  $6,1522445 - 10,0000000 = 6,1522445$ ; cui respondet numerus, fractio decimalis,  $0,0001419857$ .

IV. *Ex fractione quavis extrahere radicem quamlibet.*

*Resolutio.* Logarithmi tam numeratoris, quam denominatoris dividantur per exponentem radiceis. Tum augeatur decade &c. characteristica numeratoris, & subtrahatur logarithmus denominatoris; residuum est logarithmus fractionis radiceis quaesitae.

EXEMPLUM. Extrahatur radix undecima ex  $0,17 = \frac{17}{100}$ . Erit  $l. \frac{17}{11} = 0,1118590$ ; &  $l. \frac{100}{11} = 0,1818182$ . Porro  $10,1118590 - 0,1818182 = 9,9300408$ . Cui respondet fractio  $0,85122$ .



## SECTIO ULTIMA.

### DE PROPRIETATIBUS MAGNITUDINIS, SI SPECTETUR, UT INFINITA.

#### CAPUT I.

##### NOTIONES PRÆVIÆ MAGNI, PARVI, FINITI, ET INFINITI.

194. **I**d, in quo plura ejusdem rationis distinguere est, *magnum* vulgo dicitur. *Magnitudo* proin est ipsa plurium ejusdem rationis complexio in ente physice, vel moraliter uno. Ita pes geometricus magnus est, quia in eo 12 pollices ejusdem rationis singulos distinguere licet.

195. Quodsi illa plura tempore, aut spatio separata realiter inter se distinguuntur, *quantitatem* faciunt, vel *extensum*, vel *aggregatum*. Cujusmodi est *pes geometricus* &c. Si plura illa solum ratione nostra inter se distingui possint, & ex effectibus solum discerni, magnitudines vocantur *intensivæ*; uti *calor* &c. Denique magnitudines ab omni realitate abstractæ, uti *numeri*, *species algebraicæ*, *lineæ*, *area*, *corpora mathematica*, vocantur *magnitudines generales* unius, duarum, vel trium dimensionum.

196. *Idea* magnitudinis omnis est *relativa*; determinata igitur magnitudo con-



cipi non potest, nisi in subsidium altera quæpiam magnitudo vocetur. Porro illa magnitudo, cujus ope altera cognoscitur, *mensura* vocari solet. *Mensuræ* proin, quoniam per eas magnitudines reales determinari debent, & ipsæ determinatæ sint oportet, seu limitatæ. *Limitantur* vero, seu *terminantur* per hoc, quod alicubi incipiant, & alicubi desinant; *terminus* enim, seu *limes* est ultimum entis, seu id, ultra quod in ea linea nihil est in ente, quod quidem ad illud pertinet.

197. Magnitudinem *augere* est ejus proferre limites; *minuere* vero, limites contrahere, limites autem proferuntur additione, contrahuntur subtractione unius, pluriumve partium.

198. Magnitudo determinata, & mensurabilis  *finita* dicitur. Quare, cum infinitum finito contradictorie opponatur, *infinitum* erit magnitudo *indeterminata*, & *immemsurabilis*.

199. Potest autem magnitudo indeterminata, & immensurabilis esse, vel, quia qualibet cogitabili mensura est major; vel, quia qualibet cogitabili mensura est minor; prima dicitur *infinite magna*, seu *infinitum*: altera infinite parva, seu infinitesima.

*Coroll.* Est ergo *infinitum* qualibet cogitabili mensura majus: *infinitesima* est qualibet



libet cogitabili mensura minor. Hinc ab aliis definitur *magnitudo ultra quoslibet limites diminuta*. Vicissim: quidquid qualibet mensura cogitabili aut majus, aut minus est, pro infinite magno, aut infinite parvo habendum erit.

## C A P U T II.

DE PROPRIETATIBUS INFINITORUM, EORUM-  
QUE AD FINITA COMPARATIONE.

200. Ut de infinitorum proprietatibus recte possit constitui, adcommodari omnino debent ad leges magnitudinum in genere; quæ quidem leges de finitate, & infinite præscindunt. Id quod merito, fieri posse, postulamus; quippe cum infinita etiam sub genere magnitudinum continentur. Sunt autem leges illæ non aliæ, quam queis operationes algebraicæ diriguntur. Ex his igitur infinitorum proprietates eruendæ sunt.

201. Magnitudo infinita, si ad calculum ducitur, quoniam nullo determinato numero exprimi potest, habet hoc peculiare signum ( $\infty$ ).

202. *Unitas multiplicata per infinitum gignit infinitum*. Quælibet enim magnitudo intelligitur esse multiplicata per unitatem, seu per (1): igitur  $\infty \times 1 = \infty$ . Cum vero unitas sit minimus inter finitos nume-



ros, sequitur a fortiori, *quemlibet numerum finitum multiplicatum per infinitum gignere infinitum.*

203. Magnitudo infinite parva, quoniam qualibet unitate finita minor est, per fractionem exprimi debet, qualibet cogitabili minorem. Fractio autem quælibet tanto minor est, quo major est ejus denominator (75): ut ergo qualibet cogitabili unitate minor sit fractio, debet ejus denominator quolibet numero cogitabili esse major, adeoque infinitus. Sic ergo exprimenda erit infinitesima:  $\frac{1}{\infty}$ .

204. THEOREMA I. *Infinitum se habet ad finitum, sicut finitum ad infinite parvum.* Seu  $\infty : 1 = 1 : \frac{1}{\infty}$ ; est enim factum extremorum æquale facto mediorum.

*Coroll.* Finitum ergo est quasi medium proportionale inter infinitum, & infinitesimam.

205. Si infinitum ducatur in infinitum semel, aut iterum, ad aliam, atque aliam potentiam elevabitur; quæ infinitorum potentia, seu ordines dicuntur. E. g.  $\infty \times \infty = \infty^2$ .  $\infty^2 \times \infty^3 = \infty^5$  &c. Item  $\frac{1}{\infty} \times \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty^2}$ .  $\frac{1}{\infty^2} \times \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty^4}$  &c.

*Coroll.*



*Coroll.* Patet ergo, quid sit infinitum, aut infinetesima 1<sup>mi</sup>. 2<sup>di</sup>. 3<sup>tii</sup>. &c. ordinis; item infinitorum ordines indefinite posse crescere. Licet enim concipere infinitorum ordines qualibet infinitate infinitos. Ex. gr.  $\infty^2$  &c. Item  $\frac{1}{\infty}$  &c.

206. THEOREMA II. *Infinitum vel nusquam incipit, vel nusquam desinit.* Si enim & inciperet, & desineret alicubi, finitum foret, ac limitatum: ergo &c.

*Coroll. 1.* *Infinitum nequit esse undequaque limitatum; ac proinde nec figuram habere potest; quæ est omnimodus limes extensi.*

*Coroll. 2.* *Magnitudinis infinite parvæ omnes limites coincidunt in idem punctum.* Quamdiu enim distant, licet aliquid concipere minus, nec erit magnitudo ultra quosvis limites diminuta; inciperet alicubi, & desineret; adeoque esset determinatum, & figuram haberet.

207. THEOREMA III. *Finitum finities additum finito non facit infinitum.* Nam finita additione finitorum ad finitum limes tantum profertur, non tollitur; ac proinde ejusmodi summa semper foret determinata, nunquam erit infinita.

*Coroll.* *Finitum multiplicatum finities per finitum non potest fieri infinitum.* Multiplicatione enim ista tantum finities adderetur sibimet ipsi, id est, finito.

208. THEO-



208. THEOREMA IV. *Finitum finities subtractum ab infinito non facit finitum ex infinito.* Fiat enim  $\infty - a = m$ ; erit  $\infty = a + m$ ; hoc est: finitum additum finito faceret infinitum; quod fieri nequit (præc.), ergo &c.

Coroll. 1. *Ab infinito semper est finitum accipere in infinitum; ut nihilominus semper maneat infinitum; adeoque est inexhaustibile subtractionibus finitorum finitis.*

Coroll. 2. *Infinitum quemlibet numerum finitum finities in se complectitur.* Si enim tantum finities contineret, illo finities subtracto exhauriretur infinitus, contra Coroll. præc. unum adeo infinitum æquivalet centum, mille &c. finitis; seu universe  $\infty = m \infty$ .

Coroll. 3. *Infinitum divisum per finitum quodcunque (m) gignit quotum infinitum.* Est enim  $\infty = m \infty$ ; atqui  $\frac{m \infty}{m} = \infty$ ; ergo etiam  $\frac{\infty}{m} = \infty$ .

209. THEOREMA V. *Infinite parva finities ad se addita nunquam finitam magnitudinem adæquabunt.* Est enim  $\infty : 1 = 1 : \frac{1}{\infty}$ ; sicut igitur additione finita finitorum inter se non potest oriri infinitum (207.) ita neque additione finita infinite parvorum potest oriri finitum.

Coroll.



*Coroll. 1.* Quilibet ergo determinatus numerus infinitesimarum magnitudinem infinite parvam non excedit ex. gr.  $\frac{30000000}{\infty} = \frac{1}{\infty}$ .

*Coroll. 2.* Infinitesima, per quemcunque numerum finitum multiplicata, manet infinitesima; neque ad finitam quantitatem adfurgit: & finitum quodlibet divisum per infinitum parit quotum infinite parvum.

*Coroll. 3.* Quodlibet finitum excedit quemlibet numerum infinitesimarum finitum. Continet itaque quodlibet finitum infinitas infinitesimas; & vicissim infinitesima multiplicata per infinitum gignit productum finitum; seu  $\frac{1}{\infty} \times \infty = \frac{\infty}{\infty} = 1$ . Finitum vero divisum per infinitesimam gignit quotum infinitum. Est enim  $m : \frac{1}{\infty} = \frac{m \infty}{1} = \infty$ .

210. THEOREMA VI. *Finitum quolibet numero determinato infinitesimarum ablato nunquam fiet infinitesima.* Fiat enim, si potest fieri,  $a - \frac{m}{\infty} = \frac{1}{\infty}$ ; foret  $a = \frac{m}{\infty} + \frac{1}{\infty}$ ; hoc est, infinite parva finities sibi addita magnitudinem finitam constituerent, quod fieri nequit (209.).



211. THEOREMA VII. *Si concipiatur, infinito finitum addi, vel ab eo subtrahi, illud neque crescet, neque decrescet in ratione infiniti. Hoc est: non fit magis, vel minus infinitum, quam fuit antea. Ratio enim infiniti stat in prædicato immensurabilitatis; hoc autem prædicatum cum antea jam adfuerit ex hyp. additione finiti finita non acquirit, nec subtractione perdit.*

*Coroll. 1.* Totum quodlibet addita, vel subtracta parte mutatur essentialiter, infinitum autem addito, vel subtracto finito non mutatur essentialiter: igitur *finitum non est pars infiniti.*

*Coroll. 2.* Cum sit  $1 : \infty = \frac{1}{\infty} : 1$ ; patet, neque finitum in ratione magnitudinis crescere, aut decrescere addito, vel subtracto quovis numero determinato infinitesimalium. *Infinitesima proin nequit haberi pars finiti.*

*Coroll. 3.* In calculo igitur finitum additum, vel subtractum ab infinito: item infinitesima addita, vel subtracta finito pro nihilo putantur. Igitur est  $\infty \pm 10000 = \infty \pm 0 = \infty$ ; &  $a \pm \frac{1000}{\infty} = a \pm 0 = a$ .

*Coroll.*



*Coroll. 4. Pars infiniti infinita pariter sit, oportet.* Est enim totum, magnum, compositum; habet itaque partes: non autem habet finitas (Cor. 1.) ergo infinitas.

*Coroll. 5. Infinitum ordinis inferioris respectu infiniti ordinis superioris; item infinitesima ordinis superioris respectu infinitefimæ ordinis inferioris in calculo negligi potest.* Est enim  $\infty^2 : \infty^3 = 1 : \infty$ ; item  $\frac{1}{\infty^2} : \frac{1}{\infty^3} = 1 : \frac{1}{\infty}$ : Itaque, uti finitum respectu infiniti, aut infinitesima respectu finiti negligitur, ita etiam &c.

212. THEOREMA VIII. *Infinitum quodlibet est omnis sua potentia.* Est enim infinitum quodlibet  $\infty = m \infty$  (208. Cor. 2.). Porro ( $m$ ) quolibet finito majus, ac proin infinitum poni potest; igitur  $\infty = \infty \infty = \infty^2$ ,  $= m \infty^2$ , & ita pergendo sine fine: ergo exponens scribi potest quolibet finito major; hoc est, infinitus; est proin  $\infty = \infty^\infty$ ; & quia quodlibet infinitum est infiniti ordinis, erit  $\infty = \infty^\infty$  &c. est itaque infinitum quodlibet omnis sua potentia.

*Coroll.* Continet igitur quodlibet infinitum non infinitos solum binarios, centenarios, millenarios &c. sed infinitas infinitates, singulas plusquam cogitabili quolibet



libet infinitate, & ordine infinitas. Idem cum proportionem de infinite parvis debet intelligi.

*Schol.* Notiones de quantitibus infinite magnis, & infinite parvis, deque earum proprietatibus maximum usum habent in rebus physicis, qui consistit in comparandis inter se quantitibus finitis, earumque rationibus, & adfectionibus detegendis.





P A R S II.

---

COMPLECTENS  
E L E M E N T A  
GEOMETRIÆ.



PAR 3

CONTRACTS

F. J. E. M. D. 11

GEORGE





# PROLEGOMENON.

---

## I.

**G**eometria scientia est, quæ investigat, & demonstrat proprietates quantitatis continuæ.

2. Quantitas continua tres dimensiones admittit, in longum, latum, & profundum. Quare illa tres partes complectitur: *Longimetriam*, quæ quantitatem solum longam: *Planimetriam*, quæ quantitatem longam simul, & latam: demum *Stereometriam*, quæ quantitatem in longum, latum, & profundum extensam considerat.

3. Quantitas solum longa, nullius latitudinis, nullius profunditatis, *linca* dicitur: quæ in longum, & latum extensa est, caret vero omni profunditate, appellatur *superficies*: demum quantitas longa, lata, & profunda simul *corpus*, sive *solidum* audit. De singulis ea adferemus, quæ instituti nostri esse videbuntur.

*Schol.* Equidem in rerum natura nulla quantitas datur continua, quæ non habeat omnes tres dimensiones simul; nihilominus quævis seorsim,



& a reliquis separata spectari potest. Sic potest cogitari viæ longitudo, quin ejus latitudo in considerationem veniat: sic in planitie ad solam longitudinem, & latitudinem attendi potest, quin de profunditate, qua reapse constat, cogitetur.

Tribus sectionibus rem omnem absolvamus: prima aget de lineis: altera de superficiebus, tertia de solidis scitu necessaria continebit. Ad finem generalia trigonometriæ planæ principia: tum præcipuas sectionum conicarum adfectiones adferemus.

## S E C T I O I.

### DE LINEIS.

#### CAPUT I.

##### NOTIONES PRÆVIÆ.

4. **Punctum**, prout hoc geometræ spectant, nullius est dimensionis, seu quantitas, cujus dimensiones sunt infinite parvæ. Non ergo a parte rei existit punctum, sed solum concipitur existere; non tam est magnitudo, quam initium omnis magnitudinis continuæ.

5. Si punctum continuo motu fluere, & ubique sui vestigium relinquere cogitetur, generabit suo fluxu *lineam*, i. e. magnitudinem solum longam; verum omni latitudine, omni profunditate carentem.

6. Si



6. Si punctum ita moveri concipitur, ut fluxu suo in neutram partem deflectat, via ejusdem erit *linea recta*; sin vero singulis momentis declinat a priore tramite, *linea* prodibit curva.

*Coroll. 1. Data duo puncta determinant situm lineæ rectæ; adeoque ab uno puncto ad alterum nonnisi unica recta duci potest.*

*Coroll. 2. Linea recta est omnium brevissima, quæ inter duo puncta duci possunt. Proinde distantiam unius puncti ab altero sola metitur. Mensuræ quippe determinatæ sint oportet, & constantes.*

*Coroll. 3. Non possunt duæ rectæ sese intersectare, nisi in unico puncto; Si enim duobus in punctis congruerent, non jam duæ, sed unica recta forent, quod manifeste ex notione lineæ rectæ consequitur.*

7. Duæ lineæ rectæ, quæ in quopiam puncto concurrunt, inde vero magis, magisque divergunt a sese invicem, in ipso puncto concursus *angulum* efficiunt, *rectilineum*, de quo solo agimus, quem definimus *duarum rectarum in puncto quodam communi sibi occurrentium alterius ab altera recessum, vel etiam, alterius ad alteram inclinationem*. Lineæ, quæ angulum comprehendunt, vocantur *latera*, seu *crura*: punctum ipsum concursus *vertex anguli* dicitur.

*Coroll.* Magnitudinem anguli minime determinat longitudo laterum, angulum



7 comprehendendum; utcunque enim producta concipiuntur, quamdiu eadem manet inclinatio, idem punctorum lineæ unius a punctis respondentibus lineæ alterius re-  
 ctus, idem pariter manet angulus.

*Schol.* In denominandis angulis plerumque tribus literis utimur, eamque, quæ in vertice anguli ponitur, mediam pronunciamus. Sic angulum, quem duæ rectæ  $DC$ ,  $CB$  comprehendunt (Fig. I.) denominamus angulum  $BCD$ . Quandoque intra ipsa crura ponitur litera unica, quæ angulum designat. Sic prior angulus per literam  $m$  exprimi quoque posset.

8. Si linea recta alteri ita infistit, ut in neutram partem inclinet, illa ad alteram perpendicularis, aut normalis dicitur. Sic  $TC$  est normalis ad  $AB$ .

*Coroll. 1.* Ex eodem puncto  $T$  ad rectam  $AB$ : vel ad idem ejusdem rectæ  $AB$  punctum  $C$  tantum unica perpendicularis duci potest. Quæcunque enim alia recta in unam, vel in alteram partem inclinatur.

*Coroll. 2.* Omnium rectarum, quæ ex aliquo puncto  $T$  ad lineam quamdam  $AB$  possunt duci, brevissima est perpendicularis, metitur enim viam brevissimam puncti ad lineam.

9. Angulus rectus ille est, qui inter duas rectas comprehenditur, quarum altera ad alteram perpendicularis est. Angulus obtusus est major recto: angulus acutus ille vocatur, qui minor recto est. Sic angulus  
 $ACT$



$ACT$  est rectus: ang.  $ACD$  est obtusus: ang.  $DCB$  est acutus.

10. Si concipitur (Fig. I.), lineam  $AB$  circa medium punctum  $C$  gyrari eousque, dum integram periodum abolverit, singula puncta lineæ  $AB$ , excepto medio  $C$  curvam in se redeuntem describent, quam *circulum* dicimus, cujus omnia circumferentiæ, seu *peripheriæ*  $BDTASB$  puncta æqualiter ab intermedio puncto  $C$ , tanquam *centro* disjunguntur. Ejusmodi peripheria circularis, sive major, sive minor, in 360 æquales partes, seu *gradus*, dividitur; quivis gradus complectitur 60 minuta prima, quodvis minutum primum 60 secunda, & sic porro. Ita vero ejusmodi partes scribimus: v. gr.  $36^{\circ} \cdot 20' \cdot 13''$ , id est: 36 gradus: 20 minuta prima: 13 secunda. Dimidia pars circuli dicitur *femiperipheria*, & complectitur  $180^{\circ}$ ; pars quarta vero dicitur *quadrans*; est 90 graduum. Pars quivis peripheriæ inter duas rectas ex centro ad eandem ductas comprehensa, *arcus* circuli est; qui varius est pro vario numero graduum, quos complectitur. *Diameter* est linea recta, quæ utrinque in peripheria circuli terminatur, & transfit per centrum. Sic  $AB$  est diameter. Dimidia pars diametri ex. gr.  $AC$  vel  $BC$  vocatur *semidiameter*, vel *radius*.



Quævis alia linea utrinque in peripheria terminata, sed non transiens per centrum, *chorda* est; talis est  $GF$ .

*Tangens* circuli est linea recta, qui circulum in unico puncto contingit, ex. gr. linea  $tT$  est *tangens* circuli  $ATBS$ . *Secans* vocatur recta, quæ circulo alicubi duobus in punctis occurrit.

*Coroll.* Ex dictis colligitur, omnes radios, seu semidiametros, proin & diametros integras alicujus circuli inter sese æquales esse.

*Schol.* Reliquas notiones suis locis adferemus.

## CAPUT II.

### DE LINEIS RECTIS, QUÆ SPATIUM NON CLAUDUNT.

II. Duæ lineæ rectæ nunquam spatium aliquod claudent; verum sese aut in quodam puncto interfecabunt; tum vero magis, magisque a se divergent in infinitum; vel in infinitum productæ nuspiam concurrent, & multo minus spatium claudent, utpote ex utraque parte adpertum. Nos de lineis rectis acturi, quæ spatium non concludunt, de iis primum differemus, quæ in puncto quopiam concurrent; tum de lineis nuspiam concurrentibus agendum erit.



## §. I.

*De Lineis rectis in aliquo puncto concurrentibus.*

X 12. THEOREMA. *Mensura anguli est arcus circuli, qui ex vertice anguli, tanquam centro, describitur.*

*Dem.* Metitur talis arcus recessum unius lineæ ab altera; vel inclinationem unius ad alteram: ergo & angulum (7).

13. DEFINITIO. Duæ quævis lineæ rectæ *DE, AB* (Fig. I.) in aliquo puncto *C* se interfecantes quatuor angulos efficiunt; quorum duo, communi latere utentes, dicuntur *contigui*, aut *deinceps positi* (ejusmodi sunt *o & m : o & n : n & p : p & m*) duo quivis, qui sibi opponuntur, *verticales*, seu *ad verticem oppositi*; quales sunt *m & n*; item *o & p*.

## COROLLARIA.

I. *Duo quivis anguli deinceps positi, sive contigui simul faciunt 180°. Habent enim pro mensura semiperipheriam circuli.*

II. *Mensura anguli recti est arcus circuli 90°, seu quadrans. Angulus igitur acutus pauciores, obtusus plures, quam 90° complectitur.*

III. *Summe omnium angulorum, qui fieri possunt ad idem ejusdem rectæ punctum C ex quavis parte 180° efficit, seu, æquivalet duo-*



*bus rectis: ex utraque vero parte simul  $360^\circ$ , seu quatuor rectos constituit.*

IV. *Anguli duo ad verticem oppositi sunt æquales.* Est quippe  $o + m = 180^\circ$ ; pariter  $o + n = 180^\circ$ : ergo est  $o + m = o + n$ ; & tollendo utrinque  $o$  est  $m = n$ .

V. *Dato uno angulo hoc ipso innotescunt reliqui omnes, quos duæ lineæ  $AB$ ,  $DE$ , in quopiam puncto  $C$  se interfecantes utrinque faciunt.*

## §. 2.

### *De Lineis parallelis.*

14. *Rectæ, quæ in infinitum productæ nunquam sese interfecant, aut quæ æqualiter ubique a se distant, dicuntur parallelæ.*

*Coroll. 1. Perpendiculara ex una parallelarum ad alteram demissa ubique sunt inter se æqualia, & parallelæ. Sic  $ih$  erit  $=$  & parallelum alteri  $kl$  (Fig. II.).*

*Coroll. 2. Per idem punctum nonnisi unica parallela ad rectam  $CD$  duci potest.*

*Coroll. 3. Inter parallelas omnes rectæ, æqualiter inclinatæ, sunt inter se æquales, & vicissim.*

15. *Si duas lineas parallelas  $AB$ ,  $CD$  tertia quæpiam interfecat  $FG$ ; octo anguli effor-*



efformantur; quatuor nempe *externi*  $r, s, q, t$ : quatuor *interni*  $m, n, o, p$ . Illi, qui  
qui jacent ad partes contrarias, dicuntur  
*alterni*. Sic  $n$  &  $o$ ,  $p$  &  $m$  sunt *alterni in-*  
*terni*:  $t$  &  $r$ ,  $q$  &  $s$  sunt *alterni externi*. Por-  
ro  $n$  &  $s$ ,  $m$  &  $t$  denominantur *interni exter-*  
*ni ad eandem partem*:  $n$  &  $m$  duo *interni ad*  
*eandem partem*:  $t$  &  $s$  duo *externi ad eandem*  
*partem*. Eadem ex altera parte denomi-  
nationes locum habent.

X 16. THEOREMA I. Si duas lineas paral-  
lelas  $AB, CD$  secat tertia quæpiam recta  $FG$ ,  
Imo. duo anguli interni ad eandem partem  $m$ ,  
&  $n$ , vel  $o$  &  $p$  simul faciunt duos rectos,  
seu  $180^\circ$ .

II<sup>do</sup>. Duo anguli alterni interni sunt æqua-  
les v. gr.  $o = n$ .

III<sup>tio</sup>. Duo alterni externi pariter æquales  
sunt v. gr.  $r = t$ .

IV<sup>to</sup>. Externus, internus ad eandem par-  
tem æquantur, ex. gr.  $n = s$ .

V<sup>to</sup>. Duo anguli externi ad eandem partem  
faciunt simul  $180^\circ$ .

Demonstratur Imum. Omnes anguli inter-  
ni  $o + m + n + p$  simul faciunt quatuor  
rectos (13. Cor. III.) ergo, cum  $FG$  ad  
utramque parallelam  $AB, CD$  sit æquali-  
ter inclinata, necesse est, ut summa angu-  
lorum  $m + n$  ex una parte sit æqualis sum-  
mæ



mæ angulorum  $o + p$  ex altera; seu, ut  $m + n$  simul constituent  $180^\circ$ , totidemque  $o + p$  complectantur.

*Demonstr. II<sup>dum</sup>.* Anguli  $m + n$  continent simul  $180^\circ$  (præc.) verum &  $m + o$  faciunt  $180^\circ$  (13. Cor. I.) ergo erit  $m + n = m + o$ ; & æqualia tollendo  $n = o$ . Eodem modo sequitur, esse  $p = m$ .

*Demonstr. III<sup>tium</sup>.* Est  $o + r = 180^\circ$ , &  $n + t = 180^\circ$ : ergo  $o + r = n + t$ ; & tollendo æqualia  $o$  &  $n$ , est  $r = t$ . Sic quoque ostenditur, esse  $q = s$ .

*Demonstr. IV<sup>tum</sup>.* Est  $s = o$  (13. Cor. IV.) &  $n = o$  (n. II.): ergo  $s = n$ . Sic erit  $t = m$ :  $q = o$ :  $p = r$ .

*Demonstr. V<sup>tum</sup>.* Anguli  $s + m + n + t$  faciunt  $360^\circ$ , seu duos rectos: sed  $m + n$  continent  $180^\circ$  (n. I.) ergo etiam  $s + t$  simul faciunt  $180^\circ$ , seu æquivalent duobus rectis.

17. THEOREMA II. Si duæ lineæ  $AB$ ,  $CD$  a tertia  $FG$  ita secantur, ut una ex supra positis proprietatibus subsistat: v. gr. ut duo interni anguli ad eandem partem faciunt simul  $180^\circ$  &c. Istæ duæ lineæ  $AB$ ,  $CD$  erunt parallelæ; hoc ipso, quia, positis his proprietatibus utraque ad tertiam  $FG$  æqualiter inclinetur, necesse est.

Schol.



*Schol.* Quidquid de duabus parallelis dictum fuit, idem demonstratur de quocunque aliis, ab eadem tertia recta intersectis.

## CAPUT III.

## DE LINEIS RECTIS, QUÆ SPATIUM CLAUDUNT.

18. Rectæ, quæ concursu suo spatium quoddam comprehendunt, figuram efficiunt, quam ob angulos, quos rectæ comprehendunt, *polygonum* dicunt. Polygonum itaque universim spatium comprehendit, pluribus rectis, seu lateribus sub variis angulis sibi junctis conclusum.

19. Cum vero tribus saltem rectis opus sit, ut spatium claudatur, hinc prima, & simplicissima polygonorum species *triangulum* est; de quo, tanquam ceterorum polygonorum elemento, primo nobis agendum erit.

## §. I.

## De Triangulis.

20. Triangulorum variæ sunt proprietates, five in se absolute spectentur; five cum aliis comparentur; quare hunc Sphum in duos numeros distinguimus; quorum primo de triangulis in se spectatis: altero de comparatione triangulorum inter se differemus.



## N. I.

*De variis speciebus, & proprietatibus triangulorum, prout in se, & absolute spectantur.*

21. DEFINITIONES. Triangula tum ratione laterum, tum ratione angulorum varias in classes dividuntur. Ratione laterum tres sunt species triangulorum: *æquilaterum*, quod omnia latera æqualia habet: *Isoſcelicum* (*Isoſceles*) cujus duo latera æquantur: *scalenum*, quod nullum latus alteri æquale habet. Ratione angulorum iterum in tres classes distribuuntur, in *rectangulum*, quod unum continet angulum rectum: *obtusangulum*, in quo angulus unus obtusus est: *acutangulum*, quod omnes angulos acutos habet.

22. In triangulo rectangulo illud latus, quod opponitur angulo recto, *hypothenuſa* vocatur; duo reliqua, angulum rectum comprehendunt dicuntur *catheti*. Quodvis vero latus trianguli respectu anguli oppositi *basis* trianguli: perpendiculum ex illo angulo in basin demissum, *altitudo* trianguli nominatur.

23. THEOREMA. *In quovis triangulo omnes anguli simul præciſe continent  $180^{\circ}$ , seu æquivalent duobus rectis* (Fig. III.).

*Dem.* Ducatur in triangulo  $ABC$  per verticem  $A$  recta  $ED$  ad basin  $BC$  parallela; evidens est, angulos  $b + A + c$  simul com-



complecti  $180^\circ$  (12. Cor. III.); est vero ob  $ED$  ad  $BC$  parallelam  $b = B$ , &  $c = C$  (16): ergo etiam anguli  $B + A + C$  simul faciunt  $180^\circ$ , seu æquivalent duobus rectis.

### COROLLARIA.

I. In triangulo nonnisi unus rectus, aut unus obtusus angulus esse potest; reliqui duo sunt acuti.

II. In triangulo rectangulo duo anguli acuti simul faciunt  $90^\circ$ , & siquidem æquantur inter se, quilibet habet  $45^\circ$ .

III. Si in triangulo omnes anguli sunt æquales, quisque eorum continet  $60^\circ$ .

IV. Dato uno angulo datur summa reliquorum, & si duo innotescunt, notus est & tertius, qui est complementum ad duos rectos.

V. Si quod latus trianguli, v. gr.  $BC$  producat, erit angulus externus  $m$  æqualis summæ duorum angulorum interiorum oppositorum  $A$  &  $B$ . Est enim  $A + B + C = 180^\circ$ ; porro  $C + m = 180^\circ$ : ergo est  $A + B + C = C + m$ ; &  $A + B = m$ .

VI. Si omnia latera trianguli producantur, omnes tres anguli externi simul constituunt  $360^\circ$ , seu quatuor rectos. Nam tres externi una  
cuna



cum internis tribus continent  $540^{\circ}$ ; ab his si tres internos, seu  $180^{\circ}$  subtrahas, manent  $360^{\circ}$ .

VII. *Si potest ostendi, quod in duobus triangulis duo anguli sint æquales, hoc ipso sequitur etiam tertium in uno triangulo esse æqualem tertio in altero.*

## N. II.

### *De Comparatione Triangulorum.*

24. Duplici ratione geometræ triangula, omnesque figuras reliquas comparant: *primo* quidem, dum situm, & magnitudinem tum laterum, tum angulorum: *secundo* dum ipsa figurarum spatia comparant. Verum altera hæc comparationis ratio ad sequentem sectionem pertinet. quæ de superficiebus tractat, hoc loco primam solummodo spectamus.

25. Triangula, quæ inter sese comparari solent, vel sunt æqualia (ut ajunt) per congruentiam: vel similia solum. *Triangula æqualia per congruentiam* sunt illa, quæ omnes angulos, & latera æqualibus angulis opposita habent æqualia. *Triangula similia* solum sunt, quæ habent solos angulos, non item latera æqualia. In his latera *homologa*, seu ejusdem denominationis vocantur illa, quæ æqualibus angulis opponuntur.

26. Axio-



26. AXIOMA. Quæ sibi mutuo superimposita perfecte congruunt, sunt æqualia.

27. THEOREMA I. Duo triangula  $x$  &  $z$  erunt æqualia (Fig. IV.), si 1<sup>mo</sup>. duo latera  $AB$ ,  $AC$  sunt æqualia duobus lateribus homologis alterius trianguli  $ab$ ,  $ac$ , & præterea angulus interceptus  $BAC$ ,  $bac$  æquatur:

2<sup>do</sup>. Si bases  $BC$ ,  $bc$  cum duobus angulis basi utrinque adjacentibus fuerint æquales:

3<sup>tio</sup>. Si omnia latera habuerint æqualia.

Dem. Quæ sibi mutuo imposita perfecte congruunt, sunt æqualia (axioma): sed duo triangula, quæ aut duo latera cum angulo intercepto: vel basin, seu unum latus cum duobus angulis adjacentibus: vel denique omnia latera habuerint æqualia, sibi mutuo superimposita perfecte congruunt, ergo sunt æqualia.

Dem. min. 1<sup>um</sup> membrum. Si duo latera cum angulo intercepto in triangulis  $x$  &  $z$  perfecte æquantur, tunc etiam tertium latus æquatur tertio, & duo anguli adjacentes homologi, id est, æqualibus lateribus oppositi, pariter æquales sunt (24) ergo sibi mutuo imposita perfecte congruent.

Dem. min. 2<sup>dum</sup>. membrum. Si duo triangula  $x$  &  $z$  latus, seu basin  $BC$ ,  $bc$  æqualem habent, & præterea duo quivis anguli adjacentes  $B$ ,  $b$ , item  $C$ ,  $c$  æquantur: etiam tertius angulus  $A$ , erit æqualis ter-



tio  $a$  (23. Cor. VII.); ergo duo latera  $ab$ , &  $ac$  congruent cum duobus homologis  $AB$ , &  $AC$ , & in  $A$  concurrent; id est tota triangula sibi mutuo superimposita congruent.

*Dem. 3<sup>tium</sup>. membrum.* Si in triangulis duobus  $x$  &  $y$  tria latera æquantur, singula singulis, etiam anguli æqualibus lateribus oppositi erunt æquales (24): ergo sibi mutuo imposita perfecte congruent.

28. THEOREMA II. *In triangulo isoscelico  $ABC$  (Fig. V.) sunt anguli, quos duo latera æqualia  $AB$ ,  $AC$  cum tertio  $BC$  faciunt, æquales.*

*Dem.* Si ex  $A$  in basin  $BC$  demittitur recta  $AD$ , quæ eandem basin bifariam secat, duo triangula  $y$ , &  $x$  erunt æqualia, ob omnia latera æqualia (Theor. præc.) proin & anguli æqualibus lateribus oppositi erunt æquales (26) ergo ang.  $ABC = \text{ang. } ACB$ .

### COROLLARIA.

I. *In triangulo isoscelico recta  $AD$ , quæ a vertice anguli  $A$ , in oppositam basin demissa, eandem bifariam secat: etiam angulum  $BAC$  secat in duos æquales angulos, & ad eandem basin perpendicularis est.*

II. *Si  $AD$  ad  $BC$  est perpendicularis: & angulum  $BAC$ , & basin  $BC$  bifariam secat.*

III. *Re-*



III. *Recta AD, quæ angulum BAC bisecat, perpendicularis est ad basin eamque bisariam dividit.*

29. THEOREMA III. *Si duo triangula solum similia sunt, & unius angulus ponatur super angulum æqualem alterius, laterisque primi eum angulum comprehendentia supra latera homologa alterius, erit latus tertium unius trianguli parallelum lateri tertio alterius trianguli (Fig. VI.).*

*Dem.* Si angulus  $n$  æquali angulo  $A$ , & latus  $no$  sibi homologo  $AC$ , latus  $nm$  alteri homologo  $AB$ , imponantur, erit  $mo$  latus tertium parallelum lateri tertio  $BC$ . Cum enim triangula sunt similia, erit angulus  $Amo = ABC$ , &  $Aom =$  angulo  $ACB$ ; hoc est interni, & externi ad eandem partem sunt æquales: ergo  $mo$  erit parallelum lateri  $BC$  (17.)

*Schol.* Si angulus  $m$  ponatur super angulum  $B$ , erit  $no$ , parallelum ad  $AC$ ; si demum angulus  $o$  imponatur angulo  $C$ , latus  $nm$  fiet parallelum lateri  $AB$ .

30. THEOREMA IV. *Si ex quovis puncto  $m$  (Fig. eadem) ad arbitrium assumpto in latere  $AB$  trianguli  $ABC$  ducatur recta  $mo$  parallela basi  $BC$ , triangula  $mAo$ ,  $BAC$  erunt similia.*

*Dem.* Sunt anguli ad  $m$  &  $B$ , item ad  $o$  &  $C$  æquales (16) angulus ad  $A$  utrique



triangulo est communis: ergo triangula sunt similia.

7 X 31. THEOREMA V. Si ex angulo recto  $A$  trianguli rectanguli  $ABC$  (Fig. VII.) demittitur perpendicularum  $AD$ : isthoc dividet triangulum in duo minora  $x$  &  $y$ , toti, & inter se similia.

Dem. Conferendo 1<sup>mo</sup>. triangulum  $x$  cum toto  $ABC$ , est angulus  $BDA = \text{ang. } BAC$  (uterque enim rectus est) angulus  $ABD$  utrique triangulo,  $x$  & toti  $ABC$  est communis: ergo erit & tertius  $BAD = \text{tertio } ACB$ .

Conferendo 2<sup>do</sup>. triangulum  $y$  cum toto  $ABC$ , est angulus iterum  $ADC = BAC$ ; angulus  $ACD$  utrique triangulo,  $y$ , & toti communis est: erit ergo & tertius  $DAC$  in triangulo  $y = \text{tertio } ABC$  in toto.

Quæ vero similia sunt uni tertio, sunt similia inter se (axioma) ergo &  $x$  erit simile  $y$ .

## §. 2.

### De Quadrilateris.

32. Quadrilaterum, cujus bina opposita ex utraque parte latera sunt parallela, parallelogrammum dicitur, quod pro vario situ, & magnitudine laterum, & diversitate angulorum varia nomina fortitur.

33. Si



33. Si omnes quatuor anguli sunt recti, *rectangulum*; si præterea omnia latera æqualia sunt, *quadratum* dicitur.

34. Si sola latera sunt æqualia, non item anguli, *parallelogrammum* vocatur *rhombus*: si & latera, & anguli sunt inæquales, *rhomboides* compellatur. Omne aliud quadrilaterum, quod non est parallelogrammum, nominatur *trapezium*; vel *trapezoides*, si duo tantum latera sunt parallela.

35. *Diagonalis* illa recta dicitur, quæ ab uno angulo parallelogrammi ad alterum oppositum ducitur.

36. THEOREMA I. *In quovis quadrilatero summa omnium angulorum æquatur quatuor rectis, seu  $360^\circ$  (Fig. VIII.).*

*Dem.* Quadrilaterum per diagonalem in duo trianguła dividitur, quorum quodvis duos rectos, seu  $180^\circ$  continet: ergo &c.

37. THEOREMA II. *In quovis parallelogrammo duo quivis anguli oppositi, & duo quævis latera opposita æquantur.*

*Dem.* Imum. In parallelogrammo  $ABCD$  (Fig. ead.) producto latere  $BC$  in  $H$  est angulus externus  $DCH$  æqualis angulo  $ABC$ , interno ad eandem partem: æqualis angulo  $ADC$  alterno: ergo etiam est angulus  $ABC = \text{ang. } ADC$ : ergo hoc



ipso erunt quoque duo reliqui oppositi  $BAD$ ,  $BCD$  inter se æquales.

*Dem.* Idem. Duo quævis latera opposita  $AD$ ,  $BC$ , item  $AB$ ,  $DC$  jacent inter duas parallelas, & sunt parallela, ergo æquantur (14. Cor. 3.).

*Schol.* Propositio conversa: quadrilaterum, in quo anguli oppositi, & latera opposita, singula singulis æquantur, parallelogrammum est; æque evidens est; cum æqualitas angulorum, & laterum oppositorum ipsum parallelismum laterum, tanquam necessarium requisitum postulet: uti ex præcedente demonstratione manifeste patet.

### + COROLLARIA.

I. In parallelogrammo rectangulo omnes quatuor anguli æquales sunt. Sunt enim omnes recti.

II. Quodvis parallelogrammum per diagonalem dividitur in duo æqualia triangula. Sunt enim æquilatera: ergo & æquiangula (28).

III. Hinc quodvis triangulum  $ABD$  est dimidium parallelogrammi, cujus duo latera sunt parallela duobus lateribus trianguli  $AB$ , &  $AD$ .

### §. 3.

#### *De aliis polygonorum classibus.*

38. Polygona a numero laterum suam habent denominationem. Tetragonum habet quatuor latera, Pentagonum quinque, Hexago-



*xagonum* sex, *heptagonum* septem, *octogonum* octo &c. Dividuntur in duas classes, scilicet in regularia, & irregularia. *Regulare* polygonum est, quod habet omnes angulos æquales, & omnia latera æqualia, atque similiter posita: *Irregulare* est, in quo nec anguli, nec latera æquantur.

39. Alia est divisio polygonorum in Symmetrica, & non symmetrica. *Symmetrica* sunt, quæ constant lateribus oppositis æqualibus, & parallelis; cujus generis sunt omnia parallelogramma. Habent hæc polygona necessario parem laterum numerum. Reliqua polygona dicuntur *non symmetrica*.

Recta ab uno angulo polygoni ad oppositum ducta, uti in parallelogrammis, *diagonalis* vocatur.

40. THEOREMA I. *Summa omnium angulorum internorum alicujus polygoni æquatur facto ex numero laterum in  $180^\circ$ , minus  $360^\circ$  (Fig. IX.).*

*Dem.* Summa omnium angulorum polygoni æquatur summæ omnium angulorum, quos continent triangula, in quæ polygonum resolvi potest, exceptis iis, qui sunt circa communem verticem C, quorum summa est  $360^\circ$ , atqui triangula, in quæ resolvi polygonum potest, sunt tot, quot latera polygoni: ergo summa angulorum



lorum polygoni est toties  $180^\circ$ , quot sunt latera, demtis  $360^\circ$ .

*Schol. 1.* Sit polygonum octo laterum, seu octogonum. Multiplicetur 8 per  $180$ : factum erit 1440; ab hoc subtrahatur  $360$ : residuum erit 1080, qui numerus summam graduum designat, quos omnes anguli polygoni simul continent.

*Schol. 2.* Si in polygono anguli oppositi per diagonales conjunguntur, illud in tot dividetur triangula, quot sunt latera, demtis duobus. Quare in hoc casu *summa omnium angulorum internorum polygoni æquatur facto ex  $180^\circ$  in numerum triangulorum*: seu, in numerum laterum demtis duobus.

*Schol. 3.* Si omnia polygoni latera producantur, omnes anguli externi simul sumpti in quocunque polygono æquivalent quatuor rectis, seu  $360^\circ$ . Si enim polygonum per diagonales in triangula dividatur, anguli externi una cum internis simul æquantur  $180^\circ$  toties sumptis, quot sunt latera polygoni. Si summa proin internorum angulorum, quæ est æqualis  $180^\circ$  in numerum triangulorum ductis, a priori facto subtrahatur, differentia dabit summam angulorum externorum,  $= 360^\circ$ .

Sit polygonum 5 laterum; erit summa angulorum externorum  $= 180 \times 5 - 180 \times 3 = 900 - 540 = 360^\circ$ .

*Coroll.* In circulo, quia est polygonum regulare, laterum numero infinitorum, & infinite



infinite parvorum, summa omnium angulorum externorum iterum æqualis est  $360^\circ$ . Quare *angulus quivis externus, seu angulus tangentis, & curvæ est infinite parvus, seu*  
 $= \frac{1}{\infty}$ .

## CAPUT IV.

DE LINEIS, ET ANGULIS AD CIRCULUM  
RELATIS.

41. Si cujuspian polygoni regularis latera ponantur in infinitum multiplicari eorum vero magnitudo imminui pariter in infinitum, orietur circulus. Est itaque circulus polygonum regulare laterum infinite multorum, & infinite parvorum.

42. THEOREMA I. *Si in aliquo circulo duæ diametri  $AB$ ,  $DG$  (Fig. X.), sese intersectant normaliter, seu ad angulos rectos, quavis chorda  $mn$ , or ad diametrum alterutram  $AB$  parallela normaliter, & in duas æquales partes secatur.*

*Dem.* Ducantur ex centro  $c$  radii  $cm$ ,  $cn$ ,  $co$ ,  $cr$ , triangula  $mcn$ ,  $ocr$ , erunt isoscelica; & quia  $DG$  ex hypoth. ad  $AB$  perpendicularis est, erit itidem ad chordas  $mn$ , or parallelas diametro  $AB$  perpendicularis. Secus enim nec anguli alterni: nec internus, externus ad eandem partem forent æquales (16) atqui perpendicularis in triangulo isoscelico ex vertice anguli



in basin oppositam ducta eandem bifariam secat (29. Cor. II.) ergo &c.

### COROLLARIA.

I. Vicissim recta quævis  $CG$  ex centro ducta, & chordam bissecans secat eam perpendiculariter (29. Cor. I.).

II. Recta  $CG$  secans chordam bifariam, & perpendiculariter, transit per centrum. Transit enim per angulum, quem duo radii  $mc$ ,  $cn$ , vel  $oc$ ,  $cr$  comprehendunt (29. Cor. I.).

III. Recta  $CG$ , ex centro ducta quæ chordam secat bifariam, etiam arcum, quem chorda subtendit bissecat. Bissecat enim angulum  $mcn$ , vel  $ocr$  (29. Cor. I.), ergo & arcum, qui est mensura anguli.

+ 43. THEOREMA II. Angulus in circulo habet pro mensura semisummam arcuum  $\left(\frac{m+n}{2}\right)$  quos crura utrinque producta intercipiunt (Fig. XI.).

Dem. I. Si angulus sit in ipso centro, patet. Est enim anguli  $a$  mensura arcus  $m$ , & quia  $a = b$ , erit etiam  $m = n$ . Quare erit mensura anguli  $a = \frac{2m}{2} = \frac{m+n}{2}$ .

II. Si angulus sit extra centrum, & alterum latus transeat per centrum (Fig. XII.). Concipiatur alterutrum crus situ sibi parallelo moveri versus  $n$ . Evidens est 1<sup>mo</sup>. arcum  
cum



cum  $n$  tantumdem decrescere, quantum crescit arcus  $m$ , ac proinde horum arcuum semisummam non mutari. 2<sup>do</sup>. Nec mutari angulum  $c = a$ : Quare erit etiam hoc casu  $c = \frac{m+n}{2}$ .

III. Si nec angulus sit in centro, nec centrum sit in alterutro latere (Fig. ead.). Cruce altero situ sibi parallelo ex centro in  $c$  dimoto, moveatur & alterum crus situ sibi parallelo in  $d$ ; erit angulus  $d = c = a$ , qualem postulavimus. His positis evidens est, iterum neque angulum, neque semisummam arcuum mutari; tametsi iterum crescat arcus  $m$  ea ipsa quantitate, qua decrescit arcus  $n$ : ergo denuo erit  $d = \frac{m+n}{2}$ .

Est igitur manifestum, angulum quemlibet  $d$  intra circulum æquari cuidam angulo ad centrum, & quamlibet semisummam arcuum interceptorum æqualem esse arcui, qui angulum ad centrum æqualem metitur: universe itaque quilibet angulus in circulo pro mensura habet semisummam &c. seu  $d = \frac{m+n}{2}$ .

+ 44. THEOREMA III. *Angulus in periphæria circuli pro mensura habet semiarcum, cruribus interceptum. Seu  $a = \frac{m}{2}$  (Fig. XIII.).*



*Dem.* Quilibet angulus  $d = \frac{m+n}{2}$   
 (Theor. præc.) figatur jam alterum crus  
 in  $f$ , & circa punctum  $f$  moveatur versus  $a$ ;  
 his positis arcus  $m$  manebit constanter idem,  
 & arcus  $n$  identidem decrescet, fietque  
 $n = 0$ , seu zero, ubi angulus  $d$  periphe-  
 riam attigerit. Itaque hoc casu formula  
 $\frac{m+n}{2}$  abibit in hanc  $\frac{m}{2}$ : ergo angulus in  
 peripheria  $a = \frac{m}{2}$ .

45. THEOREMA IV. *Angulus extra peri-  
 pheriam habet pro mensura semidifferentiam ar-  
 cuum interceptorum, seu  $g = \frac{m-n}{2}$  (Fig.ead.).*

*Dem.* Iisdem, ut supra positis, & mo-  
 tu cruris alterius versus  $g$  continuato, pa-  
 tet, arcum  $n$ , jam ad nihilum redactum  
 crescere iterum in contrariam partem, adeo-  
 que fieri negativum. Quare formula  $\frac{m+n}{2}$   
 hoc casu abibit in hanc  $\frac{m-n}{2}$ ; proinde fo-  
 re  $g = \frac{m-n}{2}$ .

### COROLLARIA.

I. *Angulus tangentis, & chordæ pro men-  
 sura habet semiarcum, quem chorda subtendit.*  
 Patet, si crus alterum figatur in  $a$  & pun-  
 ctum  $c$  eousque elevetur, dum linea  $ac$  fiat tan-



tangens (Fig. XIV.). His enim positis arcus  $m$  fiet æqualis arcui, quem crus  $ab$ , alterum, ceu chorda, subtendit. Est autem univérse  $a = \frac{m}{2}$  (44).

† II. *Tangens est ad diametrum normalis.* Angulus enim tangentis, & chordæ æquatur semiarculi, quem chorda subtendit, & diameter, tanquam chorda maxima subtendit semicirculum, cujus semissis est quadrans: erit ergo angulus tangentis, & diametri  $= 90^\circ$ ; id est rectus: tangens ergo ad diametrum normalis est.

III. *Angulus tangentis, & secantis promensura habet semidifferentiam arcuum interceptorum.* Est enim angulus extra circum (45).

† IV. *Angulus in semicirculo rectus est, & quotlibet anguli in peripheria eidem arcui insistentes æquales sunt.* Quia ille quadrantem: isti æqualem singuli mensuram habent. (Fig. XV.).

† V. *Angulus (a) ad centrum circuli duplex est anguli (o) ad peripheriam eidem arcui insistentis.* Illam quippe integer arcus  $bg$ , hunc dimidiis, seu  $\frac{bg}{2}$  metitur (Fig. XII.).

VI. *Ducæ chordæ parallelæ in circulo utrinque æquales arcus comprehendunt* (Fig. XV.). Ducatur linea  $on$ : erunt duo anguli  $mno$ ,

*nor*



*no* *r* æquales: proin etiam angulorum mensuræ,  $\frac{m o}{2} = \frac{n r}{2}$ : ergo & integri arcus *mo*, *nr* æquantur.

## CAPUT V.

## DE PROPORTIONIBUS LINEARUM.

## §. I.

*De Proportionibus linearum in triangulis.*

46. HYPOTHESIS. Ducatur ex *A* perpendicularis *AD* ad basin *BC*, eaque in quotcunque æquales partes dividatur. Per puncta divisionum *o* & *n* agantur rectæ *fg*, *hi* basi parallelæ. Ex punctis *f*, *h*, *g*, *i* demittantur perpendiculara *fv*, *hs*; item *gx*, *ir* (Fig. XVI.) Erunt 1<sup>mo</sup>. triangula *Afo*, *fhv*, *hBs* ex una parte, & ex altera *Aog*, *gxi*, *irC* inter se æqualia.

*Dem.* Sunt *Ao*, *fv*, *hs* perpendiculara intra parallelas ex constructione æquidistantes intercepta: ergo æqualia. Porro anguli ad *o*, *v*, *s* sunt recti: ad *f*, *h*, *B* sunt interni, & externi ad eandem partem: ergo sunt æquales; proin dicta triangula habent omnes angulos æquales, & unum latus æquale, ergo latera *Af*, *fh*, *hB* inter se, uti ipsa triangula æqualia erunt (28). Idem dici de lateribus *Ag*, *gi*, *iC* potest.



2<sup>do</sup>. *Partes laterum inter se, & cum totis lateribus sunt proportionales.*

*Dem.* Posita æqualitate partium  $Af$ ,  $fh$ ,  $hB$  ex una, &  $Ag$ ,  $gi$ ,  $iC$  ex altera parte stabunt sequentes proportionēs:

$[Af:fh=Ag:gi]$  Est enim ubique idem  
 $[fh:hB=gi:iC]$  quotiens rationis,  $= 1$ .

Vel

$Af:Ag=fh:gi=hB:iC$  alternando. Igitur erit etiam

$Af+fh+hB:Ag+gi+iC=Af:Ag$   
 hoc est  $AB:AC=Af:Ag$

Dein, quia  $Af:fh=Ag:gi$  erit etiam

$Af+fh:Af=Ag+gi:Ag$

hoc est  $Ah:Af=Ai:Ag$

& alternando  $Ah:Ai=Af:Ag$ .

*Schol.* Demonstratio locum habet etiam tum, cum ponitur, perpendicularem non in æquales partes, sed alia quacunque ratione divisam esse. Ex. gr. sit  $AD$  in duas partes  $AO$ , &  $OD$  dissecta, quæ rationem ad se habeant  $= 1:2$ . Semper verum erit: esse  $Af:Ag=fB:gC$  proin etiam  $Af+fB:Ag+gC=Af:Ag=fB:gC$  seu  $AB:AC=Af:Ag=fB:gC$ .

47. THEOREMA I. *In triangulis similibus latera homologa sunt proportionalia* (Fig. VI.).

*Dem.* Sint duo triangula  $ABC$ ,  $mno$ , similia, & imponatur minus majori, ita, ut angulus  $n$  cadat supra angulum  $A$ , erit latus  $mo$  parallelum lateri  $BC$  (30.). Proin stabit proportio:  $Am:AO=AB:AC$

vel



vel  $nm: no = AB: AC$ . Si imponatur angulus  $m$  angulo  $B$ , erit latus  $no$  parallelum lateri  $AC$ : ergo iterum erit  $Bo: Bn = BC: BA$ ; seu  $mo: mn = BC: BA$ . Denique ex eadem ratione erit  $mo: no = BC: AC$  (Hypoth.).

48. THEOREMA II. Si in duobus triangulis tria latera tribus homologis sunt proportionalia, anguli lateribus proportionalibus oppositi æquales sunt, & triangula sunt similia.

*Dem.* Stet in triangulis supra positis data proportio:  $nm: no = AB: AC$  & imponatur minus triangulum majori, ita, ut angulus  $n$  cadat supra angulum  $A$ : erit latus  $mo$  parallelum lateri  $BC$ . (Nam nonnisi ex tali laterum parallelismo ejusmodi proportionales erui, supra ostensum est.) Itaque erunt anguli ad  $m$  &  $B$ ; pariter ad  $o$  &  $C$  æquales: atque adeo tertius angulus  $n$  erit æqualis tertio  $A$ : omnes ergo anguli lateribus proportionalibus oppositi æquales erunt: & triangula ipsa inter se similia.

*Schol.* Idem consequitur: si fit  $nm: mo = AB: BC$ ; vel  $mo: no = BC: AC$  ut patet, si successive concipiatur angulus  $m$  imponi angulo  $B$ , & angulus  $o$  angulo  $C$ .

*Coroll.* Triangula ergo, quæ habent latera homologa proportionalia, & angulos lateribus homologis oppositos æquales, similia sunt.

49. THEOREMA III. Si in duobus triangulis  $x$ , &  $y$  (Fig. VI.) duo latera  $AB$ ,  
 $AC$



$AC:nm$ , no æqualem angulum comprehendentia sunt proportionalia, tota triangula erunt similia.

*Dem.* Imponatur latus  $nm$  lateri homologo  $AB$ , pertingens usque ad  $m$ ; ducatur  $mo$  parallela ad  $BC$ : cadet ob angulum  $n = A$  etiam latus  $no$  supra latus  $AC$ , & pertinget usque ad  $o$ . Est enim  $AB:AC = Am:Ao$  ex constructione,  $= nm:no$  ex hypothesis; uti ergo  $nm = Am$ ; ita etiam  $no = Ao$ ; proin triangulum  $mAo$  est  $=$  triangulo  $mno$ ; anguli itaque ad  $B$  &  $C$  æquantur angulis ad  $m$  &  $o$ , & tota triangula sunt similia.

+ 50. THEOREMA IV. Perpendicularum  $AD$  ex angulo recto  $BAC$  in hypotenusam demissum est medium proportionale inter segmenta hypotenusæ  $BD, DC$  (Fig. VII.).

*Dem.* Conferendo duo triangula similia  $x, y$  (32) latera homologa erunt proportionalia: ergo stabit proportio:  $BD:AD = AD:DC$ . Proin  $AD^2 = BD \times DC$ .

*Coroll.* Quadratum semiordinatæ circuli in diametrum demissæ, est æquale factò ex segmentis, vel abscissis diametri, seu, ut dici solet rectangulo ex abscissis (Fig. VII.). Ducantur enim chordæ  $BA, AC$ , erit angulus  $BAC$  rectus (45. Cor. IV.). Erit itaque ex præmissis  $BD:AD = AD:DC$  ergo  $AD^2 = BD \times DC$ .



*Schol.* Sit  $BC = 2a$ ; pars  $dr$  inter ordinatam, & circuli centrum intercepta  $= x$ : erit  $BD = a - x$ , &  $dc = a + x$ . Dicatur præterea ordinata  $AD = y$ . Quia est  $AD^2 = BD \times DC$ : erit substituendo  $y^2 = (a - x) \times (a + x) = a^2 - x^2$ . Inde sequitur; quia  $x$  denotat distantiam ordinatæ a centro, ordinatas circuli eo fieri minores, quo magis a centro recesserint; a centro vero æquidistantes esse æquales; ordinatam vero centro respondentem esse maximam.

+ 51. THEOREMA V. Quodvis latus trianguli rectanguli, angulum rectum comprehendens est medium proportionale inter hypotenusam, & ejus segmentum adjacens (Fig. VII.).

*Dem.* In triangulis similibus latera æqualibus angulis opposita sunt proportionalia: ergo 1<sup>mo</sup>. comparando triangulum  $x$  cum toto, erit  $BC:AB = AB:BD$ . 2<sup>do</sup>. comparando triangulum  $y$  cum toto,

$BC:AC = AC:DC$ . Hinc colligendo facta extremorum, & mediorum est

$$BC \times BD = AB^2$$

$$BC \times DC = AC^2.$$

+ Coroll. Quadratum hypotenusæ est æquale summæ quadratorum laterum, angulum rectum comprehendentium. Est enim  $BC \times BD = AB^2$ , &  $BC \times DC = AC^2$ : ergo etiam summæ factorum æquantur, seu  $BC \times BD + BC \times DC = AB^2 + AC^2$ :

seu



feu  $BC \times \overline{BD + DC} = AB^2 + AC^2$  :  
 feu  $BC \times BC$ , hoc est,  $BC^2 = AB^2 + AC^2$ .

## §. 2.

De Proportionibus linearum in polygonis  
similibus.

52. *Polygona similia sunt, quæ habent latera proportionalia, & angulos proportionalibus lateribus oppositos æquales (48. Cor.). Latera homologa, vel rectas similiter positas in polygonis non solum ipsa polygoni latera, aut eorum diagonales homologas, sed quasvis alias rectas per polygona similia ductas, quæ homologa latera in eadem ratione secant, dicimus. Perimeter polygoni est summa omnium laterum illud concludentium.*

53. THEOREMA I. *Polygona similia per diagonales ex angulis homologis ductas dividuntur in triangula pariter similia (Fig. XVII.).*

*Dem.* Ducantur in duobus polygonis  $ABCDE$ ,  $abcde$  diagonales  $AC$ ,  $AD$ : dico, triangula  $ADE$ ,  $Ade$  fore similia. Est enim  $AE : DE = Ae : de$ , & anguli  $AED$ , &  $Aed$ , lateribus proportionalibus intercepti sunt æquales (ex construct.) ergo tota triangula sunt similia (49). Eodem modo ostenditur, triangula  $ABC$ ,  $abc$



esse similia; unde sequitur, & reliqua duo  $ACD$ ,  $Acd$  esse similia.

*Coroll.* Sunt ergo & ipsæ diagonales  $AC$ ,  $Ac$ :  $AD$ ,  $Ad$  inter se, & cum lateribus polygonorum proportionales. Immo quaecunque alicæ rectæ in polygonis similibus similiter positæ, & latera polygonorum in eadem ratione secantes ipsis lateribus proportionales sunt. Sint enim ejusmodi duæ rectæ  $ME$ ,  $me$ , quæ latera homologa  $CD$ ,  $cd$  ita secant, ut sit  $MD:CM = md:cm$ ; erunt triangu-  
la  $MDE$ ,  $mde$  denuo similia; quia  $MD:ED = md:ed$ , & anguli intercepti ad  $D$ , &  $d$  sunt æquales: erit igitur &  $EM:em = ED:ed = CD:cd$  &c.

*Coroll. 2.* Sequitur præterea, omnia polygona regularia ejusdem nominis, ex. gr. pentagona, hexagona &c. esse inter se similia: Dividuntur enim in triangu-  
la ex centro similia, & numero æqualia.

*Coroll. 3.* Erunt denique omnes circuli inter se similes, utpote polygona regularia ejusdem nominis, quæ constant lateribus similiter positis, & in infinitum æqualiter multiplicatis.

54. THEOREMA II. Perimetri figurarum similium sunt inter se, ut quævis dimensiones homologæ (Fig. XVII.).

*Dem.* Sint duæ ejusmodi figuræ similes duo polygona  $ABCDE$ ,  $abcde$ ; erit ex  
ipsa



ipsa eorum notione:  $AE: Ae = ED: ed$   
 $= DC: dc = CB: cb = BA: bA$ ; erit  
 igitur in hac serie rationum similium sum-  
 ma omnium antecedentium ad summam  
 omnium consequentium; uti quivis ante-  
 cedens ad suum consequentem: hoc est,

$$\frac{AE + ED + DC + CB + BA}{Ae + ed + dc + cb + bA} = AE: Ae$$

$$= ED: ed \text{ \&c. (Algebr.) } = AC: Ac$$

$$= EM: em \text{ (Theor. præc. Cor. I.)}$$

Coroll. Peripheriæ circulorum sunt inter se,  
 uti quavis lineæ homologæ, v. gr. uti radii,  
 vel diametri: seu  $P:p = R:r = D:d$ .

## §. 3.

De proportionibus linearum, si referuntur  
 ad circumulum.

55. THEOREMA I. Segmenta duarum chor-  
 darum sese intra circumulum secantium sunt reci-  
 proce proportionalia (Fig. XVIII.).

Dem. Ductis lineis  $AD, EB$ , erunt  
 triangula  $ACD, ECB$  similia; nam an-  
 guli in  $C$  ad verticem oppositi sunt æqua-  
 les angulus  $ADE = ABE$ , & ang.  $DAB$   
 $= DEB$ ; quia insistent æqualibus arcu-  
 bus: ergo triangula sunt similia: Igitur  
 erit  $AC:CD = CE:CB = \frac{1}{CB} : \frac{1}{CE}$ .

56. THEOREMA II. Chordæ extra circu-  
 lum concurrentes in  $C$  habent partes extra cir-  
 culum



*culum jacentes totis secantibus reciproce proportionales* (Fig. XIX.).

*Dem.* Ducantur rectæ  $AE$ ,  $DB$ ; erunt triangula  $ACE$ ,  $DCB$  similia: tum ob angulum ad  $C$  communem; tum ob angulos ad  $A$  &  $D$  æquales, quippe insistentes eidem arcui  $BE$ . Hinc stabit:  $CB:CE = CD:CA = \frac{1}{CA} : \frac{1}{CD}$ . Quæ est ratio reciproca.

*Coroll.* *Tangens est media proportionalis inter totam secantem, & ejus partem extra circum* (Fig. ead.). Ducantur denuo chordæ  $DT$ ,  $GT$ , erunt triangula  $FGT$ ,  $FDT$  similia: ob angulum ad  $F$  communem, & angulum  $FDT = GTF$ ; cum uterque pro mensura habet dimidium arcum  $GT$  (44. Theor. & 45. Cor. I.). Itaque est  $FG:FT = FT:FD$ .

## CAPUT VI.

### PROBLEMATATA GEOMETRICA.

57. Varia sunt instrumenta, quorum ope hæc, quæ sequuntur, aliaque problemata geometrica in charta resolvi possunt. *Circinus*, & *regula* omnium primo requiritur. Præter regulam, & circinum dantur: *Norma*, seu duplex regula ad angulum rectum conjuncta, ex solido ligno, vel aurichalco excisa: *Transportator*, qui est semicircu-



circulus divisus in singulos saltem gradus; idem ex aurichalco, plerumque paratur: *parallelismus*, seu duæ regulæ, quarum una ab altera ope duorum brachiolorum mobilium magis, minusve removeri potest, ita tamen, ut situm inter se parallelum constanter fervent: *Circinus*, cui exempto cuspi-  
*de calamus inseri scriptorius metallicus potest:*  
*calamus scriptorius* pariter ex metallo confectus: *scala geometrica: circinus proportiona-*  
*lis.* Theca, quæ hæc instrumenta simul omnia, vel pleraque continet, passim vocatur *Theca mathematica.*

Ceterum, quis sit usus horum instrumentorum, qua ratione illa examinari oporteat, an justa sint, & rite confecta, in collegiis, oretenus uberius, commodiusque explicabitur.

Verum cum paucis admodum instrumenta, de quibus diximus, ad manum sint, methodum trademus, qua usitatoria (non enim omnia adferemus) problemata ope solius *circini*, & *regulæ* resolvi queant. Demonstrationes alias resolutionibus adjici solitas potissimum supponimus, utpote ex præcedentibus theorematibus facile deducendas.

58. PROBLEMA I. *Ex dato puncto D lineæ datæ BC erigere perpendicularem* (Fig.V.).

*Resolutio.* Accipiantur partes *DB*, *DC* æquales; 2<sup>do</sup>. describantur arbitraria ad-  
 pertura circini, majore tamen, quam sit

O 4

*BD,*



$BD$ , ex punctis  $B$ , &  $C$  arcus  $rn$ , om.  
 3<sup>tio</sup>. Ex puncto intersectionis arcum ducatur recta  $AD$ ; erit illa ad  $BC$  normalis (29. Cor. I.).

59. PROBLEMA II. *Ex puncto  $A$  extra rectam indefinitum  $BC$  sito ad hanc demittere perpendicularem (Fig. V.).*

*Resolutio.* Uno pede circini fixo in  $A$  designentur altero in recta  $BC$  duo puncta  $B$  &  $C$  æqualiter ab  $A$  remota. 2<sup>do</sup>. Ex  $B$  &  $C$  fiant eodem radio duæ intersectiones in  $F$ . 3<sup>tio</sup>. jungantur puncta  $A$ , &  $F$  per rectam  $AF$ ; erit hæc ad  $BC$  normalis.

60. PROBLEMA III. *Datam rectam bisariam secare.*

*Resolutio.* Est eadem fere cum præcedente.

61. PROBLEMA IV. *Datum angulum bissecare.*

*Resolutio.* Ex vertice anguli tanquam centro describatur arcus, qui datum angulum metitur; ducatur chorda, descriptum arcum subtendens, eaque bissecetur; recta chordam bissecans æque arcum, proin & angulum bisariam fecabit (42. Cor. VI.).

62. PROBLEMA V. *Datum angulum mensurare.*

*Resolutio.* Fit vel ope tabellæ cujusdam (vide Geometr. P. Jos. Spengler) vel ope  
 trans-



transportatoris. Methodum coram dabitur.

63. PROBLEMA VI. *Ex dato extra rectam  $CD$  puncto  $i$  huic ducere parallelam (Fig. II.).*

*Resolutio.* Erigantur ex punctis  $h$  &  $z$  perpendiculara  $hi$ ,  $zk$  æqualia; per puncta  $i$ ,  $k$  recta  $AB$  agatur: erit illa ad  $CD$  parallela (14).

64. PROBLEMA VII. *Datis duabus lineis inæqualibus  $BC$ ,  $AB$ , conficere triangulum isoscelicum (Fig. V.).*

*Resolutio.* Accipiatur ex datis lineis alterutra pro basi, v. gr.  $BC$ ; ex punctis extremis baseos  $B$ , &  $C$  describantur arcus  $rn$ ,  $om$  radio, qui sit æqualis alteri rectæ datæ  $AB$ ; tum ex puncto intersectionis arcuum  $A$  ducantur rectæ  $AB$ ,  $AC$ ; erit triangulum  $ABC$  isoscelicum.

65. PROBLEMA VIII. *Triangulum quodvis inscribere circulo, ita, ut descriptus circulus transeat per vertices trianguli (Fig. XX.).*

*Resolutio.* Bissecentur duo latera e. gr.  $AB$ ,  $AD$  trianguli bifariam, & perpendiculariter per rectas  $mn$ ,  $or$ ; erit punctum  $C$ , in quo istæ duæ perpendiculares sese interfecant, centrum circuli, radio  $CA$ , vel  $CB$  describendi.

*Coroll.* Datis ergo tribus punctis, non in directum jacentibus circulus describi potest, qui per data tria puncta transit.



66. PROBLEMA IX. *Dato triangulo construere parallelogrammum ejus duplum* (Fig. VIII.).

*Resolutio.* Sit datum triangulum  $BCD$ . Ducatur  $AD$ , basi  $BC$  parallela, & æqualis: puncta  $A$ , &  $B$  jungantur per rectam  $AB$  erit illa pariter rectæ  $CD$  æqualis, & parallela (14. Cor. 3.), &  $ABCD$  erit parallelogrammum, trianguli  $BCD$  duplum.

67. PROBLEMA X. *Supra datam rectam  $AB$  erigere polygonum regulare* (Fig. IX.).

*Resolutio.* 1<sup>mo</sup>. Quærat<sup>ur</sup> summa omnium angulorum polygoni quæsit<sup>i</sup> (40). 2<sup>do</sup>. Ope divisionis determinetur numerus graduum, qui cuivis angulo polygoni competit. 3<sup>tio</sup>. Bisseccetur angulus polygoni ad  $A$ , &  $B$  per rectas  $AC$ ,  $BC$  in  $C$  concurrentes; erit triangulum  $ACB$  isoscelicum. 4<sup>to</sup>. Ex puncto  $C$  radio  $AC$ , vel  $BC$  describatur circulus. 5<sup>to</sup>. Denique data recta  $AB$  adplicetur peripheriæ circuli, quoties potest; habebitur quæsitum polygonum.

### EXEMPLUM.

Erigatur supra lineam  $AB$  pentagonum. Summa omnium angulorum pentagoni est  $180 \times 5 - 360 (40) = 540$ . Cuivis ergo angulo respondet numerus 108 graduum. Dimidium = 54. Ducantur ergo latera  $AC$ ,  $BC$  sub angulo  $54^\circ$  ad latus  $AB$  inclinata: orietur triangulum isoscelicum  $ACB$ . Radio  $AC$  ex  $C$  describatur circu-



circulus; & basis  $AB$  successive in peripheria adplicetur, oriatur pentagonum  $ABDEFA$ .

*Coroll. 1.* Si hexagonum supra rectam  $AB$  erigendum foret; triangulum  $ACB$  fieret æquilaterum. Et quodvis latus hexagoni foret æquale radio  $AC$ ,  $CB$  &c.

*Coroll. 2.* Potest itaque quodvis polygonum regulare inscribi circulo, qui per singulos polygoni vertices transit.

*Coroll. 3.* Si circulo polygonum regulare inscribendum foret,  $360^\circ$  per numerum laterum dividantur; inventus quotus dat arcum simul, & chordam, quæ peripheriæ circuli successive adplicata quæsitum polygonum efficit.

*Coroll. 4.* Omnia triangula, in quæ polygonum regulare ex centro dividitur, inter se æqualia sunt.

68. PROBLEMA XI. *Datam rectam  $AC$  in ea ratione secare, in qua secta est alia  $AB$  (Fig. XVI.).*

*Resolutio.* Jungantur datæ rectæ quocunque angulo  $BAC$ ; ducatur per extremitates recta  $BC$ , & huic per puncta divisionum  $h, f$  agantur parallelæ  $fg, hi$ ; hæ secabunt rectam  $AC$  in eadem ratione (46).

*Coroll.* In allato problemate continetur prompta methodus, datam rectam in quocunque partes æquales dividendi. 69. Pro-



69. PROBLEMA XII. *Dato polygono supra data recta aliud simile construere* (Fig. XVII.)

*Resolutio.* Ductis diagonalibus  $AC, AD$ , in latere  $AB$ , producto, si opus est, fiat  $Ab$ , æqualis rectæ datæ, ex puncto  $b$  agatur  $bc$  parallela  $BC$ , secans diagonalem  $AC$  alicubi in  $C$ ; inde ducatur eodem modo cum  $CD$  parallela  $cd$  &c. erit polygonum  $Abcde$  dato simile; ob latera proportionalia, & angulos ex natura parallelarum æquales (53).

## SECTIO II.

### DE SUPERFICIEBUS.

70. **S**uperficies est quasi corporum extima facies, quam geometræ instar veli, omni crassitudine carentis, & absque ullo hiatu continuam concipiunt. Est igitur superficies magnitudo continua duarum dimensionum, in longum scilicet, & latum protensa. Duas superficierum classes distinguimus, planam, & curvam. Curvas corporum superficies, quales sunt sphæræ, cylindri, coni &c. in tertia sectione examinabimus. Hoc loco *de planis* differemus; & primo quidem de genesi, & proprietatibus planorum: tum de dimensione, denique



nique de eorumdem comparatione præcipua adferemus.

## CAPUT I.

DE GENESI, ET PROPRIETATIBUS  
PLANORUM.

71. Uti ex continuo, & nuspiam interrupto fluxu puncti lineam generari concipimus, ita quidem, ut, si punctum a cœpto tramite in neutram partem deflectat, illud lineam generet rectam: ita superficies plana, five area prodibit, ex. gr.  $AaDd$  (Fig. VIII.) si ponimus lineam  $AD$  ita moveri versus  $ad$ , ut sibi semper maneat parallela, & ubivis sui relinquat vestigium.

*Coroll. 1.* Superficies igitur plana  $AaDd$  æquatur summæ, omnium parallelarum, quæ inter  $AD$ , &  $ad$  per totam altitudinem  $Aa$  duci possunt.

*Coroll. 2.* Superficie planæ nulla pars supra alteram eminet, nulla infra alteram deprimitur. Quare *linea recta superficiei planæ adplicata ubique eidem tota incumbit.*

72. Quemadmodum, per duo puncta situm lineæ rectæ definiri, diximus; ita *tria puncta determinant situm plani.* Dein, uti intersectio duarum rectarum unicum punctum est, ita *duorum planorum intersectio semper linea recta est.* Denique, ut punctum lineam  
ter-



terminat; ita *terminus*, seu *limes*, *superficie*i est *linea*.

73. *Linea ad planum perpendicularis* illa est, quæ versus omnes partes plani æqualiter inclinatur; est proin omnibus rectis, per punctum, ubi illa plano insistit, ductis, *normalis*.

74. *Angulus planus* est duorum planorum, sibi alicubi occurrentium mutua ad se invicem inclinatio; cujus mensura est arcus circuli ex aliquo puncto concursus, tanquam centro, ab uno plano ad alterum ductus.

*Coroll.* Patet igitur, quæ de inclinationibus duarum linearum dicta sunt, etiam ad plana referri posse, scilicet:

1<sup>mo</sup>. *Duo plana se interfecantia angulos habent ad verticem oppositos æquales.*

2<sup>do</sup>. *Unum planum incidens in alterum efficit duo angulos deinceps positos, quæ simul duobus rectis æquivalent.*

3<sup>tio</sup>. *Quotcunque plana in eadem recta se interfecantia simul angulos efficiunt, quatuor rectis æquales.*

4<sup>to</sup>. *Planum secans duo, vel plura alia plana parallela facit angulos alternos, item externos internos ad eandem partem æquales.*



## CAPUT II.

## DE DIMENSIONIBUS PLANORUM.

75. LEMMA I. *Spatium quadrilaterum, seu trapezium  $ABCD$ , quod duas inter parallelas  $AD$ ,  $BC$ , sub quibuscunque angulis per lineas  $AB$ ,  $DC$  conjunctas, intercipitur, est æquale summæ omnium, quotquot duci possunt, parallelarum ab  $AD$  ad  $BC$  continuo crescentium (Fig. XXI.). Sequitur hoc ex ipsa genesi superficiei planæ (71. Cor. 1.).*

76. LEMMA II. *Summa omnium parallelarum, quadrilaterum  $ABCD$  complentium, constituit quamdam progressionem arithmeticam, cujus terminus primus est recta  $AD$ , ultimus  $BC$ : numerum terminorum perpendiculum  $AP$  exprimit.*

*Dem.* Ducatur perpendiculum  $AP$ , & per quocunque parallelas, e. g.  $ER$ ,  $LS$  in partes æquales dividatur; dein ex punctis  $E$  &  $L$  demittantur perpendicula  $Ei$ ,  $Lo$ ; crescent parallelæ  $AD$ ,  $ER$ ,  $LS$ ,  $BC$  ita, ut earum differentiæ sint, uti bases triangulorum  $AEF$ ,  $ELi$ ,  $LBo$  æqualium (46) proin æquales: constituent ergo progressionem arithmeticam, cujus primus terminus est  $AD$ , ultimus  $BC$ , numerus terminorum est ipse numerus parallelarum.

Porro concipiatur, tot duci parallelas æque distantes, quot sunt puncta in perpendi-



pendiculo  $AP$ , id est, infinitas, denuo earum differentiae æquantur basibus triangulorum æqualium, adeoque sunt æquales: ergo summa omnium parallelarum, ab  $AD$  ad  $BC$  continuo crescentium, id est, totum Trapezium  $ABCD$  (Lemma I.) constituit progressionem arithmeticam, cujus primus terminus est  $AD$ , ultimus  $BC$ , numerus terminorum est ipse numerus punctorum, perpendiculum  $AP$  constituentium.

† 77. THEOREMA. Spatium quadrilaterum, sive Trapezium  $ABDC$  æquatur facto ex semisumma parallelarum  $AD$ , &  $BC$  in earum distantiam, seu perpendiculum  $AP$ ; seu

$$ADBC = \frac{AD + BC}{2} \times AP.$$

Dem. Spatium quadrilaterum  $ADBC$  æquatur summæ omnium parallelarum ab  $AD$  ad  $BC$  continuo crescentium (Lemma I.) atqui hæc summa est  $= \frac{AD + BC}{2} \times AP$ : ergo & quadrilaterum &c.

Dem. min. Hæc summa parallelarum, quadrilaterum efficientium constituit progressionem arithmeticam, cujus terminus primus est  $AD$ , ultimus  $BC$ , numerus terminorum  $= AP$  (Lemma II.). Omnis vero progressionis arithmeticæ summa æquatur facto ex semisumma terminorum primi, & ultimi in numerum terminorum (Algebr.) ergo & summa omnium parallelarum,



larum, datum spatium quadrilaterum constituentium est  $= \frac{AD + BC}{2} \times AP$ .

+ COROLLARIA.

I. *Area trianguli æquatur dimidio facto ex basi in altitudinem.* Est enim in triangulo  $AD$ , seu terminus primus infinite parvus; proin evanescit, & prior formula in hanc mutatur:  $\frac{BC}{2} \times AP$ . Hinc sequitur, quod triangula supra eadem basi, & inter easdem parallelas contenta quoad areas sint æqualia; habent enim & altitudinem eandem (14. Cor. 1.). Ergo facta dimidia ex basi in altitudinem æquantur.

II. *Area parallelogrammi est æqualis facto ex basi in altitudinem.* Nam in parallelogrammo est  $AD = BC$  (37) formula igitur  $\frac{AD + BC}{2} \times AP$  abit in hanc  $\frac{2BC}{2} \times AP = BC \times AP$ . Quare parallelogramma super eadem basi, & inter easdem parallelas intercepta inter se quoad areas æquantur.

III. *Area polygoni cujusvis est æqualis summæ arearum triangularium, in quas polygonum quodvis resolvi potest.* Hinc area polygoni regularis æquatur dimidio facto ex perimetro in perpendiculum ex centro polygoni in latus quodpiam demissum. Tale enim polygonum est æquale summæ triangulorum



æqualium, in quæ istud ex centro resolvi potest (67. Cor. 4.).

IV. *Area circuli est æqualis dimidio factæ ex radio in peripheriam.* Est enim quivis circulus polygonum regulare laterum infinitorum, & infinite parvorum. *Area igitur circuli est æqualis trianguli areæ, cujus altitudo est radius, basis vero ipsa circuli peripheria.*

V. *Univerſim quævis area habetur ex factæ duarum linearum, quarum una basis, altera vero altitudo dicitur.* Tale autem factum exhibetur per parallelogrammum rectangulum. Inde est, quod factum ex duabus lineis rectis *rectangulum* dicamus; aut si lineæ fuerint æquales, *quadratum*.

78. Cum superficiem consideramus ut factum ex una linea in alteram, ejusmodi factum generalem quidem expressionem cujusdam areæ refert; necdum tamen certa ejus, ac determinata dimensio habetur. Hæc ut obtineatur, adsumenda erit mensura ejusdem cum mensurando rationis. Quemadmodum igitur lineas non per puncta, verum per alias lineas metimur, ita superficierum mensuræ non sunt lineæ, sed aliæ denuo superficies. Non autem pro communi mensura superficies aptior statui potest, ac *quadrata*, utpote quæ mensura est simplicissima, constans, ac determinata.

79. Id genus mensuræ nobis sunt quadratæ hexapedæ, vel decempedæ: quadrati



drati pedes: quadrati pollices, aut digiti: quadratæ lineæ. Est vero quadrata hexapeda area, quæ & longitudine sua, & latitudine 6 pedes complectitur. Hinc quadrata hexapeda constat 36 pedibus quadratis, seu minoribus areolis, quarum quævis denuo unum pedem & lata, & longa est: pes quadratus habet 144 pollices, seu digitos quadratos: digitus quadratus 144 lineas quadratas. Vel, si pro communi mensura decempeda servit, seu pertica 10 pedum; erit quadrata 100 pedum quadratorum: pes quadratus 100 pollices: pollex 100 lineas quadratas includit. Geographi amplitudinem tractuum, provinciarum, regnorum per *milliaria quadrata* exprimunt.

80. Ex dictis colligitur methodus inveniendi aream, seu determinandi, quot hexapedas, pedes, digitos quadratos data area contineat? Sit areæ cujusdam altitudo 5 hexap. 3 ped. 10 pollic.; basis ejusdem 3 hexap. 2 ped. 6 pollic. Reducantur primo omnia ad infimam speciem, seu ad pollices quadratos, & erit altitudo areæ 406. basis vero 246 pollicum quadratorum; ducatur dein basis in altitudinem (77. Cor. II.) erit factum = 99876 poll. quadr. qui reducti denuo ad superiores species dant 19 hexap. 9 ped. 84 poll. quadratos. Si area metienda foret triangulum, ejusdem cum præcedente area baseos, & altitudinis; inveniretur area hæc triangularis = 49938 poll.



quadr. = 9 hexap. 22. ped. 114 digit.  
quadr., quæ area triangularis præcise di-  
midium esset prioris quadrangularis.

*Schol.* Ut infima species quadratorum polli-  
cum iterum ad pedes, & hexapedas quadratas re-  
ducatur, datus pollicum quadratorum numerus  
dividendus erit per 144, & quotus inde prove-  
niens, qui pedes quadratos indicat, per 36. Ra-  
tio ex num. 79. desumitur.

81. Non adeo expedita est adcurata de-  
terminatio areæ circularis. Cum enim cir-  
culus æquatur triangulo, cujus altitudo ra-  
dius, & basis peripheria circuli est (77.  
Cor. IV.), ad determinandam ejus aream  
nota sit oportet ratio, quam radius, aut  
diameter ad peripheriam habet: atque hoc  
famosum est problema *de quadratura circuli*;  
quod nomen obtinuit vel a quadrato, com-  
muni superficierum mensura, vel ab exhi-  
bendo quadrato, æquali areæ circuli deter-  
minendæ. Labor omnis quem geometræ  
in solvendo hoc problemate impenderunt,  
eo demum recidit, ut jam certum sit, ad-  
curatam omnino rationem diametri, aut ra-  
dii ad peripheriam haberi non posse, aut,  
si quæ fuerit, numeros eam exprimentes  
adeo enormes esse, ut usus eorum in calcu-  
culis plane molestissimus evadat.

82. Inter rationes, quas varii varias  
statuerunt, diametri ad peripheriam in nu-  
meris minimis sunt sequentes:

7:22



$$7 : 22.$$

$$100 : 314.$$

$$1 : 3, 141.$$

$$113 : 355.$$

ultima hæc ratio, quæ inventorem habet *Adrianum Metium*, perfectissima est, & præ aliis adhibenda, ex eo etiam capite, quod ratio hæc facillime memoria teneatur, utpote continens tres primos numeros impares; binas unitates, binos ternarios, binos quinariorum. Id vero innuit data ratio: Si *diameter circuli 113 partes æquales continet; peripheria ejusdem 355 id genus partes complectitur.* Cujus modo rationis diametri ad peripheriam usum paucis damus.

83. PROBLEMA I. *Data diametro invenire peripheriam.*

*Resolutio.* Sit data diameter  $= D$ ; ratio diametri ad peripheriam  $= d:p$ ; erit  $d:D = p:\frac{pD}{d}$ , qui ultimus terminus ipsam dabit peripheriam.

### EXEMPLUM.

Sit data diameter 1720 milliar. german. quem numerum milliarium diameter æquatoris terrestris complectitur, erit circulus æquatoris  $= \frac{1720 \times 355}{113}$   
 $= 5403, 5398$  milliar. german.

84. PROBLEMA II. *Data peripheria invenire diametrum.*



*Resolutio.* Sit data peripheria  $= P$ ; erit  
 $p : P = d : \frac{Pd}{p}$ .

## EXEMPLUM.

*ad*  
 Juxta Picardum in Gallia unus gradus meri-  
 diani terrestris continet 57060 hexapedas; proin  
 supposita figura telluris sphaerica circulus maximus  
 æquatoris continebit 20541600 hexap. His positis  
 complecteretur diameter terræ  $\frac{113 \times 20541600}{355}$   
 $= 6538593, 8$  hexap.

85. PROBLEMA III. *Invenire aream circuli.*

*Resolutio.* Ducatur peripheria  $\frac{Dp}{d}$  in quar-  
 tam partem diametri  $\frac{dP}{p}$  seu fiat  $\frac{Dp}{d} \times \frac{dP}{4p}$   
 $= \frac{dDpP}{4dp} = \frac{DP}{4}$  factum dabit aream cir-  
 culi (77. Cor. IV.).

## ● EXEMPLUM.

Sit peripheria æquatoris terrestris  $= 5403, 5398$ ,  
 milliar. germ. quarta pars diametri  $= \frac{1720}{4} = 430$ ;  
 erit area dati circuli  $= 5403, 5398 \times 430$   
 $= 2323522, 114$  milliar. quadrat.



## CAPUT III.

## DE COMPARATIONE PLANORUM.

+ 86. THEOREMA. *Areæ parallelogrammorum, & triangulorum sunt inter se in ratione composita basium, & altitudinum.*

*Dem.* Areæ parallelogrammorum sunt, ut producta basium, & altitudinum (77. Cor. II.) atqui ista producta constituunt rationem compositam (algebr.) ergo &c.

Cum vero areæ triangulorum sunt dimidiæ parallelogrammorum (37. Cor. III.) & dimidia eandem inter se rationem obtinent, quam habent integra: etiam areæ triangulorum sunt in ratione composita basium, & altitudinum.

Sint duo parallelogramma  $x$  &  $y$ ; quorum altitudines dicantur  $A, a$ : bases  $B, b$ ; erit ratio

$$\left[ \begin{array}{l} \text{altitudinum } A : a \\ \text{basium } B : b \end{array} \right.$$

ratio composita  $AB : ab$ . Hinc erit

$x : y = AB : ab$ ; si  $x$  &  $y$  denotant trian-

gula, erit  $x : y = \frac{AB}{2} : \frac{ab}{2} = AB : ab$ .

## + COROLLARIA.

I. Si bases sunt æquales, areæ parallelogrammorum, & triangulorum sunt in ratione directâ simplici altitudinum; seu in hypoth.  $b = B$ , erit  $x : y = A : a$ . Si vero fuerit  $A = a$ : erit  $x : y = B : b$ .

P 4

II. Si



II. Si in duobus parallelogrammis, vel triangulis bases, & altitudines reciprocant; seu si  $A:a = b:B$ ; erunt areæ æquales. In hoc enim casu est  $AB = ab$ ; proin &  $x = y$ . Et vicissim, si  $x = y$  etiam  $AB = ab$ ; hinc  $A:a = b:B$ .

III. Areæ similium triangulorum, vel parallelogrammorum sunt inter se in ratione duplicata, vel quadrata basium, vel altitudinum. Sint enim duo parallelogramma, vel triangula  $x$ , &  $y$  similia: erit in iis  $A:a = B:b$  (47. 53. Cor.), hoc est, duæ rationes,  $A:a$ , &  $B:b$  sunt similes: ergo erit  $AB:ab = A^2:a^2 = B^2:b^2$  (Algebr.).

IV. Areæ figurarum similium sunt inter se in ratione duplicata laterum homologorum. Possunt enim resolvi in triangula similia.

V. Areæ circulorum sunt in ratione duplicata radiorum, vel diametrorum, vel peripheriarum, aut quorumvis laterum homologorum. Omnes enim circuli figuræ similes sunt. Ipsæ vero peripheriæ circulorum sunt in ratione simplici radiorum, aut diametrorum. Sint enim duorum circulorum peripheriæ  $P, p$ ; diametri  $D, d$ ; erit  $D:P = 113:355$ ; &  $d:p = 113:355$  (82) ergo  $D:P = d:p$ ; seu  $D:d = P:p$ .



## S E C T I O III.

## DE SOLIDIS.

87. *Solidum*, five *corpus* apud geometras est quantitas continua trium dimensionum, nempe in longum, latum, & profundum. Ideam igitur genuinam corporis mathematici tibi formas, si spatium concipis longum, latum, ac profundum, superficiebus vel planis, vel curvis, tanquam limitibus conclusum.

88. Uti generatim lineam motu puncti, superficiem motu lineæ, ita solidum, seu corpus motu superficiei continuo nasci concipimus.

89. Plura plana in aliquo puncto concurrentia *angulum solidum* comprehendunt. De hoc notandum

1<sup>mo</sup>. *Tribus saltem planis opus erit, ut angulum solidum comprehendant.* Duo enim plana nunquam spatium omni ex parte claudunt.

2<sup>do</sup>. *Anguli plani, solidum constituentes, simul sumpti nunquam quatuor rectis, seu 360° æquivalent.* Id quod ad oculum ostendi potest in chartifolio, si ex eodem, certa ratione inciso, angulum solidum formaveris.



3<sup>to</sup>. Magnitudo anguli solidi dependet a magnitudine angulorum planorum, solidum componentium. Constet ex. gr. angulus solidus tribus planis, quorum primus 70, secundus 80, tertius 90 gradus continent; erit angulus solidus  $= 70 + 80 + 90 = 240^\circ$ .

90. Tria potissimum corpora apud geometras in considerationem veniunt: *Prisma*: *Pyramis*: *Sphaera*, & omnia, quæ huc referri possunt *polyedra regularia*. Singulorum brevem descriptionem dabimus: tum de eorum dimensione, ac comparatione ea, quæ præcipua sunt, adferemus.

## CAPUT I.

### DESCRIPTIO VARIORUM SOLIDORUM.

#### *De Prismate.*

91. *Prisma est solidum basibus æqualibus, & parallelis, lateribus vero parallelogrammis comprehensum.*

93. Prisma sic efformari concipitur. Moveatur planum *ABC* (Fig. XXII.) secundum directionem cujusdam rectæ *MN*; ita, ut quamdiu movetur, sibimet parallelum constanter maneat; generabit suo motu corpus, sive solidum, quod prisma dicimus. Recta *MN* *directrix*, planum secundum illam motum *basis*, seu planum, *generans*, recta ex quovis plani *ABC* puncto  
ad



ad oppositum  $DFG$  perpendiculariter ducta *altitudo* prismatis dicitur. Hæc si fuerit directrici parallela, oritur *prisma rectum*; sin minus, *prisma obliquum* erit. Planum quodvis *non* per prisma transiens dicitur *sectio prismatis*; quæ si fuerit basi parallela, eadem æquabitur.

93. A diversa basi prisma diversa nomina fortitur. Sic *prisma triangulare* est, si basis generans est triangulum: *Parallelopipedum*, si basis parallelogrammum est: & nominatim *cubus*, si tam utraque basis, quam reliqua latera quadrata fuerint. Vocatur hic etiam *Hexaedrum regulare*, ob sex latera, quibus concluditur, inter se æqualia.

Si basis generans est circulus, seu polygonum regulare infinitorum laterum, & infinite parvorum, prisma inde natum *cylinder* dicitur. Recta, jungens centra basium *axis* cylindri vocatur (Fig. XIII.). Si axis ad utramque basin normalis est, *cylinder rectus*: secus, obliquus, seu *scalenus* audit. Cylinder rectus etiam ex rotatione rectanguli  $MABN$  circa rectam  $MN$  gignitur.

### De Pyramide.

94. *Pyramis solidum est, quod basin polygonam, & plana lateralìa triangula habet, quorum apices in unico puncto concurrunt* (Fig. XXIV.).

Pun-



Punctum  $o$  *vertex* pyramidis: recta jungens verticem cum centro baseos *axis* ejusdem nominatur. *Pyramis recta* est, si axis ad basin normalis est; in quo casu etiam *altitudinem* pyramidis metitur; si vero ad eandem ille inclinatur, *pyramis obliqua* erit.

95. Si polygonum quodcunque concipitur secundum directionem cujusdam rectæ ita moveri continuo, ut sibi semper parallelum maneat, & in proportionem arithmetica decreascit, donec omnia polygoni latera in uno puncto coeant, habetur generis pyramidis.

96. Pyramidum iterum diversæ species numerantur, pro variis basibus, & vario situ verticis. Sic datur pyramis *triangularis*, *quadrangularis*, *pentagonalis* &c. *Pyramis regularis* illa est, cujus basis polygonum regulare, & recta ex vertice ad centrum polygoni ducta simul ad eam normalis est.

Si basis est circulus, seu polygonum infinitorum laterum, infinite parvorum, pyramis mutato nomine *conus* vocatur (Fig. XXV.).

97. Si pyramis, vel conus alicubi secatur quodam plano, basi parallelo, residuum corpus *pyramis truncata*, seu *conus truncatus* audit. Conus ex rotatione trianguli  $CBo$ ; vel, si fuerit truncatus, ex rotatione trapezii  $mnAo$  oritur.



## De Sphæra.

98. *Sphæra* est solidum, *cujus omnia in superficie puncta æqualiter distant ab aliquo puncto, intra illud sito, quod centrum dicitur. Generatur, si semicirculus  $hfr$  (Fig. XXVI.) circa diametrum  $hr$  gyratur.*

99. *Axis sphæræ* est quævis recta per centrum transiens & utrinque in superficie terminata. Dicitur quoque *diameter sphæræ*, & ejus dimidium *semidiameter*, sive *radius*. Sectio sphæræ, per centrum transiens, *circulus maximus sphæræ* vocatur.

## De Polyedris.

100. *Polyedrum* generatim quodvis solidum est, planis aliquot terminatum.

101. *Regulare polyedrum* erit, *cujus omnes anguli solidi æquales sunt, a planis regularibus, & æqualibus facti.*

102. Polyedra regularia quinque duntaxat dantur; nempe:

*Tetraedrum, Hexaedrum, seu cubus: octoedrum: Icosaedrum: Dodecaedrum.*

*Tetraedrum* a quatuor planis triangularibus æqualibus, tanquam lateribus componitur:

*Hexaedrum* efficiunt sex plana quadrata æqualia.

*Octaedrum* est solidum regulare octo laterum, seu triangulorum æqualium.

*Icosa-*



*Icosaedrum* 20 ejusmodi triangulis constat æqualibus.

*Dodecaedrum* constituunt 12 pentagona regularia æqualia.

## CAPUT II.

### DE DIMENSIONE, ET COMPARATIONE SOLIDORUM.

#### §. I.

*De dimensione, & comparatione eorundem quoad soliditatem.*

103. THEOREMA I. *Soliditas prismatis, & cylindri est æqualis factæ ex basi in altitudinem.*

*Dem.* Prisma tot constat polygonis, & cylinder tot circulis æqualibus basi, quot sunt puncta in altitudine; quare, ut obtineatur tota prismatis, aut cylindri soliditas, toties basis sibimet ipsa addenda est, quot sunt puncta in altitudine: id est, basis ducenda est in altitudinem.

*Coroll.* *Prismata, aut cylindri ejusdem bases, & altitudinis quoad volumen æquantur.*

104. THEOREMA II. *Pyramis est tertia pars Prismatis eandem habentis basin, & altitudinem.* Patebit ad oculum ex sectione prismatis in tres pyramides, quarum eadem basis est, & altitudo.

*Coroll.*



*Coroll.* Cum cylinder fit prisma, & conus pyramis infinitorum laterum, infinite parvorum, erit *conus æqualis tertiæ parti cylindri ejusdem baseos, & altitudinis; adeoque æqualis basi ductæ in tertiam partem altitudinis.*

105. THEOREMA II. *Pyramides, quarum eadem est basis, & altitudo, sunt æquales (idem de conis intelligendum).*

*Dem.* Si enim in duabus ejusmodi pyramidibus fiant sectiones a basi æquidistantes, eique parallelæ, erunt sectiones utrinque æquales. Quare, cum ob æqualem altitudinem tot fieri possunt sectiones in una pyramide, quot in altera, erit & summa sectionum in una æqualis summæ sectionum in altera, hoc est, ambæ pyramides sunt æquales.

*Aliter:* Pyramis est tertia pars prismatis, & conus est tertia pars cylindri ejusdem baseos, & altitudinis (Theor. præc.) ergo, sicut prismata, & cylindri ejusdem baseos, & altitudinis quoad volumen æquantur (103. Cor.), ita etiam pyramides, & coni, quorum eadem basis est, & altitudo, sunt æquales.

106. THEOREMA IV. *Cylinder est æqualis sphaeræ, & cono simul sumptis, quorum omnium eadem est basis, & altitudo (Fig. XXVI.).*

*Dem.* 1. Sit quadrato  $afho$  inscriptus quadrans  $fh$ , & triangulum  $aho$ , & intelligatur



ligatur quadratum volvi circa axem  $h o$ ; generabitur a quadrato cylinder: a quadrante hemisphærium: a triangulo conus.

Ducatur quævis recta  $mn$ ; radio  $fo$  parallela; erit hæc eidem æqualis; porro cum triangula  $lno$ ,  $ao h$  similia sunt, est  $oh : ha = on : nl$ ; est vero  $oh = ha$ ; ergo &  $ln = no$ .

II. Ducto radio  $po$ , erit in triangulo  $pno$  rectangulo  $po^2 = pn^2 + no^2$  (51. Cor.) seu substitutis æqualibus erit  $mn^2 = pn^2 + ln^2$ . Quare, cum circuli sint, ut quadrata radiorum (80. Cor. V.); erit etiam circulus, radio  $mn$  descriptus, seu elementum cylindri, æqualis circulis, radio  $pn$ , &  $ln$  descriptis, seu elementis sphæræ, & cono simul sumptis; quod cum in omni sectione obtineat: erit & totus cylinder a quadrato  $ahfo$  generatus = hemisphærio, & cono, simul sumptis.

III. Atqui, dum parallelogrammum  $ahcr$  quadrati duplum, circa axem  $hr$  rotatur, generabit illud cylindrum, prioris duplum, & semicirculus  $hfr$  sphæram, hemisphærii duplam, & triangulum  $arh$  conum prioris duplum: ergo erit & cylinder, cujus altitudo est  $ac$ , & basis circulus ejusdem diametri (qui simul circulum maximum sphæræ adæquat) æqualis toti sphæ-  
ræ



ræ ejusdem diametri, & cono simul, cujus eadem cum cylindro basis, & altitudo est. Q. E. D.

*Coroll.* Cum conus sit tertia pars cylindri, ejusdem baseos, & altitudinis, erit sphaera æqualis duabus tertiis cylindri, cujus basis est circulus maximus sphaeræ, & altitudo ejusdem diameter. Quare, si circulus maximus ponatur  $= B$ , & diameter  $= 2a$ ; erit per Theorema primum cylindrus  $= 2aB$ : sphaera  $= \frac{4aB}{3}$ : conus  $= \frac{2aB}{3}$  seu volumina istorum corporum sunt, ut

$$2aB : \frac{4aB}{3} : \frac{2aB}{3}; \text{ seu, ut } - \quad -$$

$$\frac{6aB}{3} : \frac{4aB}{3} : \frac{2aB}{3}; \text{ seu, ut } - \quad -$$

$$6aB : 4aB : 2aB; \text{ hoc est, ut } - \quad -$$

$$6 : 4 : 2 = 3 : 2 : 1.$$

107. THEOREMA V. *Sphaera est æqualis pyramidi, cujus basis est superficies sphaeræ, & altitudo radius.*

*Dem.* Si superficies sphaeræ concipiatur resoluta in particulas ita parvas, ut infinite accedant ad superficiem planam, & a singulis earum perimetri punctis ad centrum sphaeræ rectæ tendant, habebuntur totidem pyramides, quarum bases erunt illæ particulæ superficiei sphaericæ, & altitudo communis radius sphaeræ: quare omnium sum-



ma æquabitur pyramidi, habenti basin æqualem toti superficiei sphaericæ, & altitudinem radium.

*Coroll.* Si ponatur basis hujus pyramidis, seu sphaeræ superficies  $= S$ , & altitudo, seu radius sphaeræ  $= A$ ; erit pyramis æqualis facto ex basi in tertiam partem altitudinis (104); seu sphaera est  $= S \times \frac{A}{3}$   
 $= \frac{AS}{3}$ .

*Schol.* Quod de sphaera dictum est, intelligi debet de omni polyedro regulari. Nam & hujusmodi polyedrum potest concipi compositum ex meris pyramidibus, quorum vertices in centro polyedri concurrunt, bases vero sunt plana æqualia, polyedri superficiem constituentia. *Volumen ergo cujuslibet polyedri regularis æquatur facto ex basi, seu tota superfacie in tertiam partem altitudinis.*

108. THEOREMA VI. *Soliditates duorum corporum quorumvis sunt inter se in ratione composita trium dimensionum ejusdem nominis.*

*Dem.* Soliditates corporum sunt, ut facta, quæ oriuntur, si superficies quædam, ex. gr. basis, ducatur in altitudinem (præc.) Est vero omnis superficies æqualis facto ex duabus dimensionibus (77. Cor. V.) ergo soliditates corporum, seu volumina (*Körperlicher Inhalt*) sunt, ut facta ex tribus dimensionibus.



109. DEFINITIO. Solida similia sunt, quorum anguli homologi solidi sunt æquales, & plana, illos formantia figuræ similes.

*Coroll. 1.* Cum solida similia omnes suas dimensiones homologas proportionales habent, eorum soliditates, seu volumina erunt, ut facta trium quantitatum proportionantium, ac propterea sunt in ratione triplicata, seu, ut cubi binarum quarumvis dimensionum homologarum. Hinc eruitur methodus, solidum simile alteri, simul, ejusdem duplum, triplum &c. construendi. Necesse enim est, ut singulæ ejus dimensiones sint ad singulas alterius, ut  $\sqrt[3]{2:1}$ , vel  $\sqrt[3]{3:1}$ .

*Coroll. 2.* Cum diametri, vel radii sint latera homologa sphærarum; erunt sphæræ, ut cubi diametrorum, vel radiorum.

*Schol.* Pro communi mensura in solidis adsumitur *cubus*; sicut quadratum in superficiebus. Sic, quando dicitur, solidum esse 100 pedum cubicorum, intelligitur, hoc solidum occupare 100 spatia, quorum quodvis in longum, latum, & profundum unum pedem adæquat. Si pedem dividis in pollices, habebit ejus quadratum  $12 \times 12 = 144$  poll. quadr. & cubus  $144 \times 12 = 1728$  pollices cubicos.



## §. 2.

## De Superficiebus solidorum.

110. THEOREMA I. *Superficies prismatis cujusvis demptis basibus æquatur factò ex uno ejus latere quocunque in perimetrum sectionis, ad latus illud perpendicularis (Fig. XXII.).*

*Dem.* Fiat ad latus  $AD$  prismatis  $ABCD FG$  sectio normalis per planum  $mno$ ; erit ob latera prismatis parallela eadem sectio ad reliqua latera normalis. Erit igitur mensura superficiei  $ABDF = mo \times BF$ ; superficiei  $BCGF = on \times BF$ ; & superficiei  $ACDG = mn \times AD$ : ergo, ob  $AD = BF$  (37), erit prismatis superficies demptis basibus  $= AD \times mo + on + nm$ .

*Coroll. 1.* Ergo prismatis, vel cylindri recti superficies æquatur factò ex basis perimetro in latus, vel quod idem, in axem ductò. Nam in prismatico, vel cylindro recto sectio normalis fit æqualis, & parallela basi.

*Schol.* Superficiem totam dico, si bases simul computo; per superficiem simpliciter intelligo superficiem demptis basibus, si quas habet.

*Coroll. 2.* Superficies tota cubi est æqualis sextuplo quadrato alicujus lateris, & superficies cylindri recti, si diameter baseos æquatur altitudini cylindri, est quadrupla baseos; superficies tota vero sextupla baseos. Sit  $(D)$  diameter  $(p)$ , perimeter baseos: erit superficies



cies hujus cylindri  $= Dp = \frac{4Dp}{4}$  & area  
 utriusque baseos simul  $= \frac{2Dp}{4}$  ergo tota  
 $= \frac{6Dp}{4}$ .

III. THEOREMA II. *Superficies pyramidis rectæ, cujus basis est polygonum regulare; est æqualis factæ ex dimidia perimetro baseos in rectam, ex apice pyramidis ad quodvis latus baseos perpendiculararem.*

*Dem.* Superficies pyramidis rectæ &c. est æqualis summæ superficierum omnium triangulorum lateralium; singula autem triangula cum sint æqualia, eorum summa æquatur factæ ex altitudine eorum communi (ex perpendiculo ex apice in latus quodvis baseos demisso) in dimidiam summam laterum; seu in dimidiam perimetrum baseos.

*Coroll.* Ergo superficies conii recti æqualis est factæ ex semicircumferentia baseos in latus conii, seu in rectam ex apice conii in perimetrum baseos ductam.

II2. THEOREMA III. *Superficies pyramidis rectæ truncatæ, bases regulares, & parallelas habentis, demtis basibus, æquatur factæ ex semisumma perimetrorum basium in perpendiculararem inter duo basium latera opposita interceptum.*

*Dem.* Ejusmodi superficies coalescit e tot trapeziis, bases parallelas habentibus, quot sunt basium pyramidis latera, eandem



habentibus altitudinem: atqui area cujusvis ejusmodi trapezii æquatur facto ex semisumma laterum parallelorum in altitudinem, seu perpendiculum inter duo latera parallela interceptum (77) ergo summa omnium trapeziorum, superficiem pyramidis truncatæ constituentium est æqualis facto ex semisumma perimetrorum basium, in altitudinem communem, seu perpendiculum inter duo basium latera opposita interceptum.

*Coroll. 1.* Cum omnes parallelæ æquidistantes, quæ trapezium sternunt, constituent progressionem arithmeticam (76); si concipiamus rectam quamdam ab extremis trapezii lateribus æquidistantem, erit illa media arithmetice proportionalis inter extrema, & æqualis eorundemque semisummæ (algebr.). Hinc *superficies pyramidis rectæ truncatæ etiam est æqualis perpendiculo, ducto in perimetrum sectionis inter utramque basin medice.*

*Coroll. 2.* *Superficies conii recti, & truncati, ac basium parallelarum æquat factum ex latere conii ducto in circumferentiam bases inter mediam.*

113. THEOREMA IV. *Superficies sphaeræ est quadrupla circuli maximi.*

*Dem.*



*Dem.* Per (106. Cor.) est sphaera  $= \frac{4AB}{3}$ ;  
 & per (num. 107. Cor.)  $= \frac{AS}{3}$  ergo est  
 $\frac{4AB}{3} = \frac{AS}{3}$ ; adeoque  $4B = S$  hoc est,  
*superficies sphaerae est aequalis quadruplae areae  
 sui circuli maximi.*

*Coroll. 1.* Cum area circuli maximi  
 aequalis est circumferentiae, seu perimetrop  $p$ ,  
 ductae in dimidium radium  $A$ ; seu, cum  
 $B = \frac{Ap}{2}$ ; erit  $4B = S = \frac{4Ap}{2} = 2Ap$ ;  
 seu superficies sphaerae aequalis est perimetrop cir-  
 culi maximi in diametrum, seu axem ductae.

*Coroll. 2.* Sed etiam superficies cylin-  
 dri aequatur perimetrop baseos in axem cy-  
 lindri ducto (110. Cor. 1.) ergo superficies  
 sphaerae est aequalis superficiei cylindri, cujus ba-  
 sis est circulus maximus sphaerae, & altitudo  
 diameter.

*Coroll. 3.* superficies sphaerae est ad totam  
 superficiem cylindri, cujus basis est circulus  
 maximus sphaerae, & altitudo diameter, ut 2  
 ad 3. Superficies enim sphaerae est qua-  
 drupla, superficies tota cylindri sextupla  
 circuli maximi; proinde datae superficies sunt  
 inter se  $= 4 : 6 = 2 : 3$ .

14. THEOREMA V. Superficies solido-  
 rum quorumvis sunt in ratione composita dua-  
 rum dimensionum. Patet ex praecedentibus.



115. THEOREMA VI. *Superficies solidorum similium sunt in ratione duplicata, seu quadrata dimensionis cujusvis homologæ.*

*Dem.* Sunt enim in his dimensiones homologæ proportionales: superficies ergo sunt, ut facta duarum quantitatum proportionalium, adeoque in ratione duplicata cujusvis dimensionis homologæ.

*Coroll.* *Superficies sphaerarum sunt, ut quadrata radiorum, vel diametrorum.*

116. PROBLEMA I. *Posita figura telluris sphaerica, ejusdem invenire superficiem in miliaribus germanicis.*

*Resolutio.* Ex Theorem. IV. num. 113. est  $S = 4B$ ; seu quadruplæ areæ circuli maximi. Invenimus vero supra (num. 85.  $B = 2323522, 114$  miliar. quadrat. Erit igitur  $S = 2323522, 114 \times 4 = 9294088, 456$  miliar. quadrat. german.

117. PROBLEMA II. *Invenire soliditatem telluris in miliaribus germanicis cubicis.*

*Resolutio.* Soliditas sphaeræ est æqualis  $\frac{AS}{3}$  (per  $S$  designando superficiem, per  $A$  radium ejusdem (107. Cor.)). Si ergo diameter telluris continet 1720 miliaria germanica (83) erit radius 860, & tertia pars radii 286,6 miliar. german.

Itaque soliditas ejusdem æquabitur  $9294088, 456 \times 286, 6 = 2663885750, 4896$  miliar. cub.

*Schol.*



*Schol.* Facili negotio aliorum quoque corporum e. gr. cylindri, prismatis, pyramidis &c. tum superficies, tum soliditates ex præmissis determinabis.

---

## SECTIO IV.

### PRINCIPIA TRIGONOMETRIÆ PLANÆ.

118. **T**RIGONOMETRIA est ea pars geometriæ, quæ artem docet, resolvendi triangulum.

119. Triangulum quodvis senis partibus constat, tribus nempe angulis, & totidem lateribus. *Resolvi* autem *triangulum* tunc dicitur, si tribus ejusmodi partibus datis reliquæ ope proportionis successive quæruntur. Sic datis tribus lateribus: vel datis duobus cum uno angulo: vel datis omnibus angulis cum uno latere reliquas trianguli partes invenire, trigonometria docet.

*Schol.* Datis solis angulis nonnisi similitudo, ac proportio laterum, non vero ipsa eorum magnitudo determinatur.

120. Quemadmodum triangula vel rectis, vel curvis lineis continentur; ita duplex datur trigonometria: *Plana* vocatur, quæ artem docet, resolvendi triangula lineis rectis comprehensa: *sphærica* refertur ad triangula, quæ in superficie cujusdam



sphæræ fiunt a circulatorum maximorum arcubus. Nos de plana duntaxat loquimur.

121. Cum angulos datis lateribus, aut datis angulis, & saltem uno latere, reliqua ope proportionis geometricæ inveniri oportet: requiritur, ut vel anguli, eorumque arcus, tanquam mensuræ, vel aliæ quædam lineæ horum loco lateribus sint proportionales.

122. Verum inter latera trianguli, arcusque circuli, qui angulos metiuntur, proin inter latera, & angulos nulla proportio locum habet (ut evidenter ostendi potest) rectas igitur pro angulis, eorumque arcubus substitui necesse fuit, quæ simul proportionales essent lateribus, simul angulorum magnitudinem determinarent. Hæ rectæ, quoniam angulorum, arcuumque vicibus funguntur, dici solent *functiones angulorum*. Quænam sint illæ, & quæ illarum proprietates, declarabimus.

### CAPUT UNICUM.

#### DE FUNCTIONIBUS ANGULORUM.

123. Sit angulus  $ACF$ , vel  $ACB$  (Fig. XXVII.). Ex centro  $C$  radio  $CA$  describatur circulus  $ABG$  ab  $A$ . Demittatur ab extremo arcus  $AB$  mensuræ anguli  $ACB$  perpendicularum  $BD$  in latus alterum  $AC$ . Producaturs radius  $CB$  usque in  $F$ , dum occur-



occurrat tangenti  $AF$ . Denique ex eodem puncto  $B$  in radium  $GC$  altera perpendicularis  $BH$  demittatur, eique parallela tangens  $GF$  agatur; erunt hæ ipsæ lineæ functiones anguli  $ACB$ ; & quidem  $BD$  dicitur *sinus rectus*, vel simpliciter *sinus* dati anguli  $ACB$ , vel arcus  $AB$ , qui anguli dati mensura est:  $AF$  est ejusdem *tangens*:  $DA$  inter sinum, & arcum intercepta recta *sinus versus*:  $CF$  *secans* vocatur.

124. Angulus externus a  $CB$  efficiens cum priore duos rectos est *angulus supplementi*, cum acuto  $ACB$  eosdem sinus, tangentes, & secantes habet.

125. Angulus  $GCB$ , una cum  $BCA$  complet unum rectum, dictus propterea *angulus complementi*. Ejus sinus  $HB = CD$  & tangens  $GF$  relate ad angulum  $BCA$ , & ejus contiguum a  $cB$  dicitur *cosinus*, & *cotangens*. Uti  $BD$ , &  $AF$  relate ad angulum  $GCB$  *cosinus*, & *cotangens* nominatur.

Ex ipsa hac constructione sequentia eruuntur

### *COROLLARIA.*

*Primum.* Quivis sinus  $BD$  est dimidium chordæ  $BM$  anguli dupli  $BCM$ . Est enim triangulum  $BCM$  isoscelicum; proin recta  $CD$  ex centro ducta, & ad chordam  $BM$  normalis eandem bifariam secat (28).

*Idem.*



II<sup>dum</sup>. Evanescente angulo  $ACB$ , etiam *sinus* evanescit; contra a gradu 0 ad 90 continuo crescit; & sub angulo recto æquatur radio  $GC$ , & dicitur *sinus totus*. A gradu 90 usque ad 180 eadem denuo ratione decrescit *sinus*.

3<sup>tium</sup>. Crescente sinu  $BD$  decrescit *cosinus*  $CD$ ; sique  $BD$  fit æqualis radio, *cosinus* evanescit; & vicissim.

IV<sup>tum</sup>. *Sinus versus*  $DA$  anguli acuti  $ACF$  est æqualis differentiæ inter radium  $CA$ , & *cosinum*  $CD$ . *Sinus versus*  $Da$  anguli obtusi  $FCA$  æquatur summæ ex radio  $aC$ , & *cosinu*  $CD$ .

Proin *sinus versus* a gradu 0 ad 180° continuo crescit, & sub angulo recto fit æqualis radio; sub gradu 180° autem duplo radio fit æqualis.

V<sup>tum</sup>. Crescentibus angulis usque ad gradum 90 crescunt & *tangentes*, & *secantes*. *Tangens*, & *secans* anguli recti sunt infinitæ. Sunt enim tunc parallelæ, & nonnisi in infinito concurrere concipiuntur.

VI<sup>tum</sup>. In triangulo rectangulo  $ABC$  (Fig. XXVIII.), si alterutra cathetus  $BC$  adsumatur pro radio, seu *sinu toto*: erit altera  $AB$  *tangens* anguli oppositi  $ACB$ . Si vero hypotenusa  $AC$  pro radio servit, erit  $AB$  *sinus* anguli oppositi  $ACB$ .



126. THEOREMA I. *In omni triangulo sinus angulorum sunt, ut latera illis opposita (Fig. XX.).*

*Dem.* Inscribatur quodvis triangulum  $ADB$  circulo (65) erit quodlibet ejus latus ex. gr.  $AB$  duplus sinus anguli illius, cui latus illud opponitur. Ducta enim ex centro normali  $Cm$ , erit  $Am$  sinus anguli  $ACm = \frac{1}{2} ACB$  (28)  $= ADB$  (45. Cor. V.): est vero  $Am$  dimidia chorda, seu dimidium lateris  $AB$ , angulo  $ADB$ , cujus  $Am$  sinus est, oppositum: ergo latus  $AB$  est duplus sinus anguli  $ADB$ , cui illud opponitur.

Atqui dimidia sunt in ea ratione, in qua sunt integra: ergo erit  $Am:AB = Ao:AD$ ; hoc est sin. ang.  $ADB:AB = \text{sin. ang. } ABD:AD$ .

*Schol.* Ex hoc Theoremate petitur resolutio trianguli rectanguli. Proportiones, quarum ope quævis trianguli partes inveniuntur, tabulis sinuum, tangentium &c. præmitti solent; ubi simul earundem tabularum usus explicatur.

127. THEOREMA II. *In quovis triangulo  $ABC$  (Fig. XXIX.) est summa duorum quorumvis laterum  $AC + AB$  ad eorundem differentiam  $AC - AB$ , ut tangens semisumme angulorum  $B$  &  $C$  iisdem lateribus oppositorum, ad tangentem semidifferentiæ eorundem.*

*Constructio.* Latere minore  $AB$ , tanquam radio ex centro  $A$  describatur circulus;



lus; latus alterum  $CA$  producat, donec occurrat circulo in  $D$ ; per puncta  $D$ , &  $B$  agatur recta indefinita  $DF$ ; denique puncta  $B$  &  $E$  connectantur per rectam  $BE$ ; eique per puncta  $F$  &  $C$  ducatur parallela  $FC$ .

*Demonstr. Theor.* His positis ob similitudinem triangulorum  $CDF$ ,  $EDB$  stabit hæc proportio:  $DC:EC = DF:BF$ , seu  $AC + AB:AC - AB = DF:BF$ : Est vero  $DF$  tangens semisummæ angulorum  $B$ , &  $C$ , &  $BF$  tangens semidifferentiæ eorundem: ergo &c.

*Dem. min.* In triangulo  $DCF$  rectangulo (ob angulum  $F$  ang.  $B$  diametro  $DE$  insistenti æqualem) si  $FC$  sumatur pro radio, erit  $DF$  tangens anguli  $DCF$ : atqui angulus  $DCF$  est æqualis semisummæ angulorum  $B$ , &  $C$ ; quod sic ostendo: Angulus  $o$  externus est æqualis summæ angulorum  $B$  &  $C$ : ergo angulus ad peripheriam  $n$  est æqualis  $\frac{1}{2} o$ , seu semisummæ angulorum  $B$ , &  $C$ . Est autem ob  $BE$  parallelam ad  $FC$ , angulus  $DCF = \text{ang. } m$ : ergo etiam angulus  $DCF$  æquatur semisummæ angulorum  $B$  &  $C$ : ergo  $DF$  tangens anguli  $DCF$  est tangens semisummæ angulorum  $B$  &  $C$ , quod erat primum.

2<sup>do</sup>. Si in triangulo rectangulo  $BFC$ , sumatur latus  $FC$  pro radio, erit  $BF$  tangens



gens anguli  $BCF$ , seu anguli  $v$ ; esse vero angulum  $v =$  semidifferentiæ angulorum  $B$  &  $C$ , sic porro evincitur. In triangulo  $ABC$  angulus  $C$  minor est angulo  $B$ ; proin angulus  $C$  æquatur eorundem angulorum semisummæ minus semidifferentia (algebr.).

Est vero angulus  $ACB = DCF - BCF$ ; cum igitur ex præc.  $DCF$  æquatur semisummæ angulorum  $B$  &  $C$ ; erit  $BCF$ , seu angulus  $v$  æqualis semidifferentiæ eorundem. Ergo  $BF$  est tangens semidifferentiæ angulorum  $B$  &  $C$ : quod erat alterum.

*Quare in quovis triangulo est summa laterum quorumvis ad eorum differentiam, ut tangens semisummæ angulorum datis lateribus oppositorum ad tangentem semidifferentiæ eorundem Q. E. D.*

*Schol.* Ab hoc Theoremate pendet resolutio trianguli cujuscunque, non rectanguli; uti pariter in tabulis sinuum fuse declaratur. Atque hæc de notionibus, & principiis trigonometriæ planæ dicta sufficiant.



## S E C T I O V.

### DE SECTIONIBUS CONICIS.

128. **S**ECTIONES CONICÆ sunt quatuor curvarum genera: nempe *circulus*, *ellipsis*, *parabola*, *hyperbola*; quas ideo conicas dicunt, quia ex cono diversimode secto enascuntur.

Nos illas curvas veluti c. exemptas in plano describemus, atque præcipuas earundem proprietates ex ipsarum genesi, omissis tamen rigidioribus demonstrationibus, derivabimus.

### CAPUT I.

#### GENESIS CURVARUM.

129. **PROBLEMA.** *Ope fili, & styli sectiones conicas in plano describere.*

*Resolutio pro circulo.* 1<sup>mo</sup>. Figatur alicubi claviculus in plano; 2<sup>do</sup>. Fili, diametro circuli datæ æqualis utraque extremitas claviculo nectatur: 3<sup>tio</sup>. stylus, inter utrumque filum insertus, idem semper æqualiter tendat, & circa claviculum agatur in plano. Vestigium styli in plano relictum *circulus* erit, cujus proprietates ex geometria communi innotescunt.

*Pro*



*Pro Ellipsi.* 1<sup>mo</sup>. Extrema fili progressibus æqualibus recedant a se mutuo in partes oppositas, & singula singulis claviculis innectantur. 2<sup>do</sup>. Claviculi figantur alicubi in punctis  $F$  &  $f$  a centro  $C$  æquidistantibus (Fig. XXX.). 3<sup>tio</sup>. Stylus denuo filo insertus illud adstringat continenter, & æqualiter; tum circa claviculos, summum, & imum ducatur. Via styli in plano erit *Ellipsis*.

*Corol.* In ellipsi foci a centro, & a verticibus æquidistant; seu  $FC = fC$ , &  $FM = fm$ .

*Coroll. 2.* Summa distantiarum  $pF + pf$  cujusvis puncti  $p$  in ellipseos perimetro assumpti ab utroque foco constanter eadem est, & æqualis axi majori; seu  $pF + pf = Mm = Fh + hf$ .

*Coroll. 3.* Ob æqualitatem triangulorum  $FhC$  &  $hCf$  (habent duo latera æqualia, & angulum interceptum  $=$ ) est  $Fh = hf = MC = Cm$ ; id est, distantie focorum ab extremis axeos minoris punctis æquales sunt inter se, & semiaxibus majoribus.

*PRO PARABOLA.* 1<sup>mo</sup>. Ceteris, ut antea constitutis, concipiatur longitudo fili in immensum aucta, & focus  $f$  cum centro  $C$  intelligatur infinite recedere a foco  $F$ , una cum altera fili in immensum crescentis extremitate. Hoc facto fiet  $pf$  parallela ipsi  $Ff$ . 2<sup>do</sup>. Stylus filo, ut prius insertus, il-



ludque æqua semper vi adstringens ita ex  $M$  versus  $p$  &  $q$  &c. moveatur, ut pars fili indefinita  $pS$  constanter maneat parallela ipsi  $Ff$ , & punctum fili quodlibet  $S$  tamdiu maneat in linea  $nS$ , ad axem normali, donec punctum  $S$  stylus transferit; (quod fieri ope normæ potest Fig. XXXI.) via styli in plano erit *semiparabola*, in infinitum procurrens, idemque simili modo si ex altera parte fiat, *parabola* tota designabitur; in qua  $pF$  erit *semiordinata per focus* transiens, &  $r q$ ,  $fn$  itidem *semiordinatæ*:  $MF$ ,  $Mr$ ,  $MS$  &c. *abscissæ* his respondentes.

Coroll. 1. Si, stylo consistente in  $M$ , filum, quo mediante parabola describitur, pertingat usque ad  $S$ : erit longitudo fili  $L = SF + 2FM$ . Est vero etiam  $L = Fq + qS$ : ergo constanter erit  $Fq + qS = SF + 2FM$ . Præterea est  $SF = Sr + rF$ , &  $Sr = qS$ ; igitur erit  $SF = qS + rF$ : ergo erit semper  $Fq + qS = qS + rF + 2FM$ ; & hinc  $Fq = rF + 2FM$ . Hoc est: *distantia foci a quovis puncto parabolæ est æqualis respondenti abscissæ, & insuper distantia foci a vertice.*

Coroll. 2. *Ordinata per focus est quadrupla suæ abscissæ*; seu  $2Fp = 4MF$ ; & hinc  $Fp = 2MF$  (Fig. XXX.).

Coroll. 3. Quo minor est distantia foci a vertice, eo minor est ordinata per focus, & quo illa fuerit major, tanto hæc major evadet,



evadet, & vicissim; quare etiam crus parabola minus, aut magis ab axe recedet; hoc est: *Parabola fit acutior, si focus vertici propinquior est: amplior, si magis removetur; & vicissim in parabola acutiore focus est vertici propinquior; remotior in ampliore, & minoris curvaturæ.*

PRO HYPERBOLA 1<sup>mo</sup>. Concipiatur focus alter  $f$  ex infinito parabolico per axem conjugatum  $qm$  (Fig. XXXII.) in directum jacentem cum axe principali  $MQ$  velut redux, & figatur alicubi supra  $F$  in puncto axeos producti  $f$ . 2<sup>do</sup>. Filum ex  $F$  per  $Q$  in infinitum produci, & deinde ex altera infiniti parte intelligatur per  $q$  reduci usque in  $m$ ; cujus ab  $f$  distantia pro arbitrio adsumi potest. 3<sup>tio</sup>. Altera fili ex infinito redeuntis extremitas innectatur claviculo in  $f$ ; ita poterit filum ope styli ex  $F$  usque in  $M$  duplicari, eritque  $FM = fm$ . 4<sup>to</sup>. Stylus, filum adstringens ea lege ducatur versus  $P$ , ut pars fili  $PK$  constanter dirigatur ad  $f$ , & punctum fili  $K$  ambulet in arcu circuli  $LK$ , centro  $f$ , & radio  $fL$  descripti (id quod totum ope regulæ in  $f$ , tanquam altero foco, fixæ perfici commodè potest). Erit via styli *semi-hyperbola*; cujus altera semissis simili ratione describitur. *Hyperbola conjugata* describitur contrario modo.



*Axis* hyperbolæ principalis est  $mM$ : distantia focorum inter se  $Ff$ , & a verticibus  $fm$ ,  $F M$ . *Diametri* sunt lineæ  $pP$ , per puncta homologa, & alterna ramorum conjugatorum directæ; quæ se omnes decussant in centro  $C$ . *Semiordinate* ad axem sunt lineæ ex quovis puncto  $P$  ad axem productum normales.

*Coroll.* Sectiones conicæ in infinito omnes inter se connexæ sunt; ita quidem, ut altera per alteram definiri possit. Sic *circulus* est ellipsis, cujus foci inter se infinite parum distant: *Parabola* est ellipsis, cujus axis infinitus, & foci inter se infinite distant. *Hyperbola* est parabola, cujus axis velut ex infinito retortus focum alterum ad finitam, sed contrariam distantiam reducit. Ex quo patet, sectionum conicarum eandem naturam, & proprietates communes esse; quippe cum in infinito naturam non mutant, & omnes inter se sunt connexæ, atque altera per alteram definiri possit.

## CAPUT II.

### PUNCTORUM, RECTARUMQUE IN CONICIS PROPRIETATES.

#### *De Focis.*

130. *Foci* dicuntur puncta, ex quibus, ceu originibus, curva ducitur.

*Coroll.*



*Coroll.* In circulo focus unicus est: vel, duo infinite propingui. In *ellipsi* foci duo sunt, finite inter se distantes. In *parabola* foci duo sunt infinite inter se distantes; & quoniam duo puncta fixa infinite inter se distare non possunt, reapse focus in parabola unus est. In *hyperbola* foci duo sunt, finite, sed contrarie distantes.

### De Verticibus.

131. Puncta curvæ focus proxima generatim curvæ *vertices*, & in *ellipsi* etiam *apsides* vocantur.

*Coroll.* In circulo vertices infiniti sunt. In *ellipsi* duo finite distantes, & cum focus in directum jacentes. In *parabola* unus est. In *hyperbola* iterum duo, in directum cum focus jacentes, & finite distantes. Vertex ellipseos centro virium propior dicitur *apsis ima*, remotior *apsis summa*.

### De Centris.

132. Punctum axeos medium dicitur *centrum curvæ*.

*Coroll.* In circulo centrum congruit cum focus. In *ellipsi* centrum inter focos, & curvam æqualibus intervallis jacet. In *parabola* in infinito, vel nuspiam est. In *hyperbola* extra curvas, & inter vertices, & focos æquis jacet intervallis.



*De Axibus majoribus.*

133. Linea recta, quæ curvæ vertices jungit, dicitur *axis major, transversus, principalis, latus rectum principale*.

*Coroll.* In circulo quælibet diameter pro axe majore est. In *ellipsi* axis major finitus intra curvam jacet. In *parabola* axis major est infinitus. In *hyperbola* idem finitus, & extra curvas jacet. Axis major ellipseos etiam *linea apsidum* a physicis dicitur.

*De Diametris.*

134. Recta per centrum transiens, & utrinque in perimetro terminata, *diameter* adpellatur.

*Coroll.* In circulo omnes diametri inter se æquantur. In *ellipsi* maxima diametro-rum est axis major, minima, quæ ad axem majorem normalis est: reliquarum duæ quælibet ab axe æquidistantes sunt æquales. In *parabola* omnes diametri sunt infinitæ, & inter se parallelæ. In *hyperbola* minima est diameter axis major, reliquarum duæ homologæ semper æquantur.

*De Tangentibus.*

135. Elementum curvæ, utrinque finite productum *tangens* curvæ dicitur.

*Coroll. 1.* In circulo tangens quælibet cum sua diametro angulum rectum componit.



ponit. In ellipsi solum diameter maxima, & minima tangenti sub angulo recto occurrit: In parabola solus axis major, in hyperbola diameter minima angulum rectum cum tangente efficit.

*Coroll. 2.* In qualibet sectione conica rectæ a focus ad idem periphericæ punctum ductæ, angulos cum tangente æquales componunt. In circulo quidem, five ellipsi focorum infinite propinquorum id patet ex geometria communi; inde vero ad ceteras sectiones propter naturæ communionem non injuria transfertur.

*Schol.* Inde mirabiles speculorum causticorum, tubæ stentoreæ, & acusticæ effectus, explicatum habent.

### De Ordinatis.

136. Rectæ, quæ utrinque in curvæ perimetro terminantur, & tum inter se, tum alicui ejusdem curvæ tangenti parallelæ sunt, vocantur *ordinatæ*, vel *ordinatim adplicatæ* ad eam curvæ diametrum, quæ illi puncto contactus insistit, cujus tangenti sunt parallelæ. Earum dimidia *semiordinatæ* adpellantur. In ellipsi ordinata per centrum transiens dicitur *diameter conjugata* illius, ad quam adplicatur.

*Coroll. 1.* *Ordinatæ* ad axem majorem, & minorem adplicantur normaliter in qualibet sectione.



Coroll. 2. *Ordinatæ ad diametros, præterquam in circulo, adplicantur oblique sub variis angulis.*

Coroll. 3. *Ordinatæ quævis cujuslibet sectionis conicæ a suamet diametro bissecantur. Hinc quævis diameter aream sectionis bifariam dividit; quia quodlibet elementum areæ, five ordinatam dividit bifariam.*

Coroll. 4. *Areæ circuli, & ellipseos finitæ sunt, parabolæ autem, & hyperbolæ infinitæ.*

### *De Axibus minoribus.*

137. *Ordinata ad axem majorem, cujus semissis est media proportionalis inter binas foci alterutrius a verticibus distantias, axis minor adpellatur.*

Coroll. 1. *In circulo axis minor æquatur majori.*

Coroll. 2. *In ellipsi axis minor est minima diametrorum vel maxima ordinatarum ad axem majorem.*

Dem. Sit (Fig. XXX.)  $Mm = 2a : CM = Cm = Fh = fh = a$  (129. Cor. 3.). Sit deinde minima diametrorum  $= 2Ch = 2b$ ; erit  $Ch = b$ : sit demum  $FM = fm = f$ . Ostendendum est, esse  $f : b = b : 2a - f$ .

Est autem  $Fh^2 = FC^2 + Ch^2$  (51. Cor.).

Id est - -  $a^2 = (a - f)^2 + b^2$ .

Seu



Seu -  $a^2 = a^2 + f^2 - 2af + b^2$ .

Hoc est  $b^2 = 2af - f^2$ .

Sive -  $b^2 = 2a - f \times f$ :

Ergo -  $f:b = b:2a - f$ . Est proin  $2b = 2Ch$  axis minor idemque diametrorum minima, & maxima ordinatarum.

### De Parametris.

138. Ordinata ad axem majorem per focum transiens, dicitur *parameter axeos*.

*Coroll. 1. Parameter in circulo æquatur duplæ foci a vertice distantie.*

*Coroll. 2. In ellipsi, & hyperbola non habet determinatam rationem ad distantiam foci a vertice.*

*Coroll. 3. In parabola parameter æquatur quadruplæ foci a vertice distantie.* Est enim in parabola universim distantia cujuslibet puncti perimetri a foco æqualis abscissæ & insuper distantie foci a vertice (129. pro parabola Cor. 1.) ergo, cum semiparameter  $\frac{p}{2}$  sit puncti cujusdam perimetri a foco distantia, &  $x$  abscissa, parametro respondens, sit ipsa foci a vertice distantia; erit  $\frac{p}{2} = 2x$ , & hinc  $p = 4x$ ; seu  $x = \frac{p}{4}$ .



*De Abscissis, vel Sagittis.*

139. Segmenta diametri cujuslibet inter ordinatam, & vertices vocantur *abscissæ*, aut *sagittæ*.

*Coroll.* In circulo, ellipsi, & hyperbola diameter quælibet a quavis ordinata dividitur in duas abscissas finitas. In parabola altera abscissarum finita est, altera infinita.

## CAPUT III.

## DE ÆQUATIONIBUS AD CURVAS.

140. Æquatio, quæ rationem constantem exprimit, quam habent ordinatæ ad abscissas, æquatio ad curvam dicitur, & curvæ velut naturam exponit.

*Coroll.* 1. Quoniam æquatio ad curvam ejus naturam exprimit, & sectionum conicarum, utpote in infinito connexarum eadem, & communis natura est; pariter eadem ad omnes curvas conicas æquatio erit.

*Coroll.* 2. Constat autem ex geometria communi, in circulo esse omnium semiorдинatarum quadrata æqualia rectangulis abscissarum; & hinc semiordinatarum quadrata esse inter se, uti rectangula ex abscissis. Quare in quavis sectione conica sunt quadrata semiordinatarum quarumvis inter se, uti rectangula ex abscissis respondentibus.

*Coroll.*



*Coroll. 3.* Itaque, si ordinata quælibet ponatur  $= 2y$ : axis major  $= 2a$ , abscissa ordinatæ  $2y$  respondens  $= x$ , & hinc abscissa altera  $= 2a \mp x$ ; ubi signum  $(+)$  ad hyperbolam referendum est, & signum  $(-)$  ad ceteras sectiones; erit in quavis sectione conici  $y^2 = (2a \mp x) \times x = 2ax \mp x^2$ . Qua formula rationem designamus, quæ in circulo est ratio æqualitatis: in ellipsi, & hyperbola inæqualitatis finitæ, in parabola inæqualitatis infinitæ; quæ propterea, ut usui sit, in paullo aliam transformanda est.

*Coroll. 4.* Dicatur alia quævis abscissa  $z$ , & respondens huic ordinata  $v$ ; erit  $y^2 : v^2 = 2ax - x^2 : 2az - z^2$ . Quæ proportio dicit, in circulo quadrata femiordinatarum esse æqualia rectangulis ex abscissis respondentibus.

In ellipsi eadem proportio scilicet  $y^2 : v^2 = 2ax - x^2 : 2az - z^2$ , dicit, quadrata femiordinatarum esse in ratione abscissarum respondentium; sed enim in ratione minoris inæqualitatis, (ut ajunt) quia quadratum femiordinatæ est minus rectangulo: unde etiam ellipseos nomen sumptum est.



*In hyperbola est  $y^2 : v^2 = 2ax + x^2 : 2az + z^2$ . Quæ ratio, cum sit majoris inæqualitatis hyperbolæ nomen fecit.*

*In parabola  $y^2 : v^2 = 2ax - x^2 : 2az - z^2$ . Et quia in parabola  $2ax - x^2 = 2az - z^2$ ; quippe cum utraque quantitas  $= \infty$ ; fiet dividendo alteram rationem per æqualia  $2ax - x^2$ , &  $2az - z^2$ ,  $y^2 : v^2 = x : z$ ; hoc est: *in parabola sunt quadrata ordinatarum, inter se, ut sagittæ.**

*Coroll. 5. Inter omnes parabolæ semiordinatas est etiam parameter, cujus abscissa est  $\frac{p}{4}$  (138. Cor. 4.) quare si  $\frac{p}{2}$ , five semiparameter cum alia quavis semiordinata  $y$  comparetur, erit  $y^2 : \frac{p^2}{4} = x : \frac{p}{4}$ ; & dividendo consequentes per  $\frac{p}{4}$ , fiet  $y^2 : p = x : 1$ . Itaque  $y^2 = px$ : hoc est: *In quavis parabola cujuslibet semiordinate quadratum æquatur rectangulo ex parametro in abscissam.**

*Schol. 1. In ellipsi sequentia theoremata obtinent, nobis in physica usui futura; & quæ singula vera sunt in circulo, quocum ellipsis communem naturam habet; quæ ipsa naturæ communio instar demonstrationis nobis esse potest.*

THEO-



**THEOREMA I.** *Rhomboides, quæ fiunt ex semidiametris conjugatis, singulæ æquales sunt, tum inter se, tum rectangulo ex semiaxibus.*

**II.** *Recta, quæ ab extremo diametri per focum propiorem ducitur usque in occursum diametri conjugatæ, æquatur semiaxi majori.*

**III.** *Areæ ellipsium quarumvis sunt inter se, ut rectangula ex axibus, vel semiaxibus.*

**IV.** *Quadratum semidiametri cujuslibet æquale est rectangulo, quod fit ex distantiiis focorum a puncto extremo diametri conjugatæ.*

*Schol. 2.* Qui ceteras sectionum conicarum affectiones, & has ipsas, quas modo memoravimus, rigidius demonstratas cupit, opera geometrarum passim extantia adeat. Nobis ista sufficiunt, ut ea, quæ in decursu physices de motu corporum in sectionibus conicis dicturi sumus, a tyronibus intelligantur.





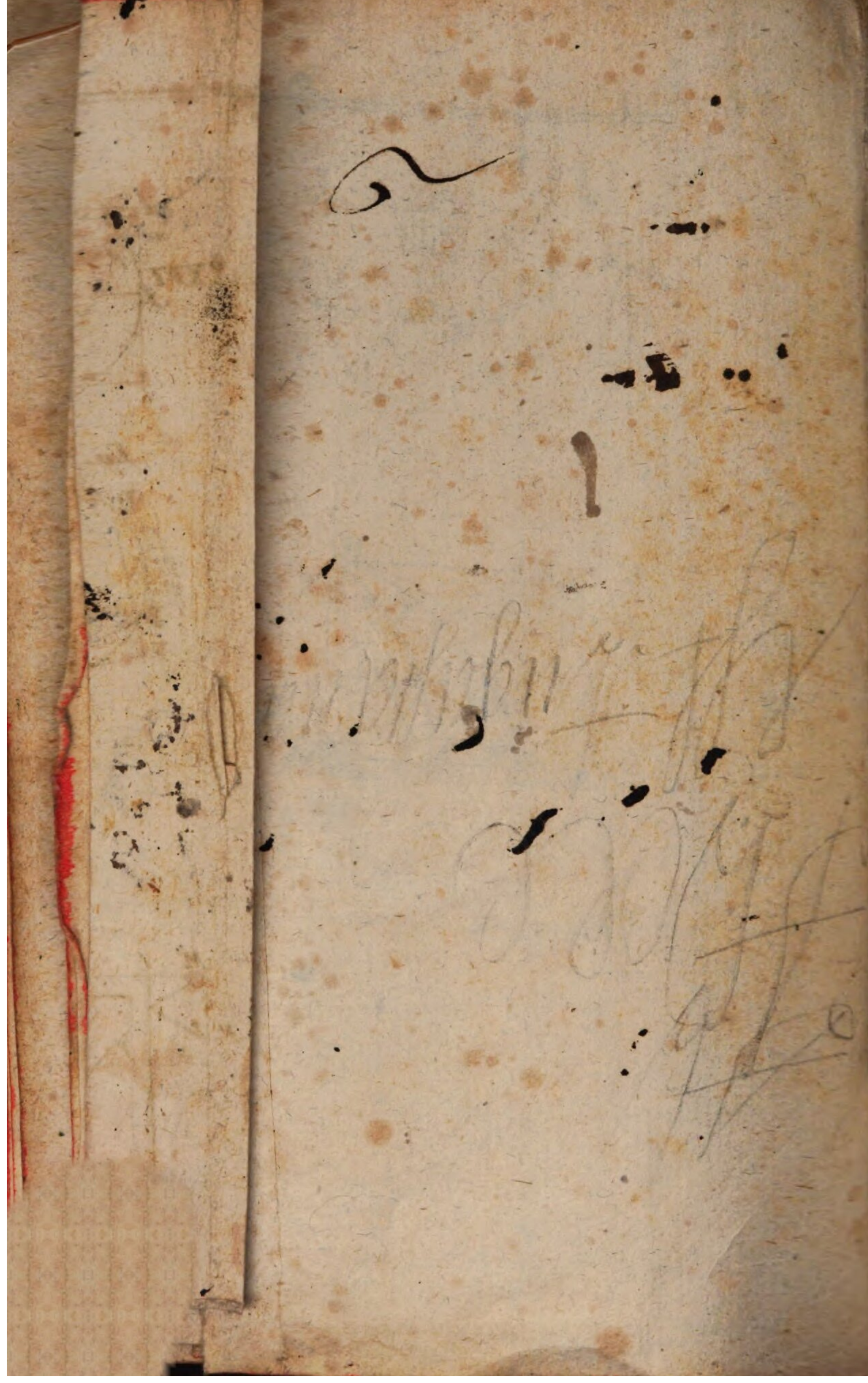
*Errata.**Sic corrige.*

in apogæo, pag. 22. Exemplo II. in perigæo  
12 lineis, pag. 25. num. 40. - - - lineas.  
12 lineas, pag. 28. lin. 17. - - - 5 lineæ.  
(a) pag. 46. Exemplo I. - - -  $a^4$ .  
 $4b^3$ ,  $f3$ , pag. 56. Schol. I. - - -  $4b^3f, 3$ .  
fractionem, pag. 72. Cor. - - - fractionum.  
incognitatum, pag. 92. num. 121. incognitarum.  
signi, pag. 116. num. 6<sup>to</sup>. - - - signo.  
Tales sunt, &, pag. 120. num. 148. sunt, ut  
 $a = \omega - d n - 1$ , pag. 125. lin. 8.  $\omega - d \times n - 1$ .  
 $b:f = g:c$ , pag. 132. ad fin. - - -  $b:f = g:c$ .  
3402, 32, pag. 158. in Exemplo. - - - 3452, 32.  
Legarithmus, pag. 160, lin. 19. - - - Logarithmus  
quivis, pag. 183. lin. 22. - - - quævis  
 $K1$ , pag. 186. §. 2. Cor. I. - - -  $Kx$   
faciunt, pag. 188. lin. 21. - - - faciant.  
(28), pag. 198. Cor. II. - - - (26)  
in Fig. XXV. lit. o deest.











Löffel. 1806 #

unum

Fac

et ipsa sua vota in

unum

unum

unum

unum

unum

unum

unum

unum

unum

unum

unum

unum

unum

unum

unum

unum

unum

unum

unum

unum

unum

unum

unum

unum

unum

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu

Augsbu







Zeiller, Johann Nepomuk.

Elementa Arithmetices, Et Geometriae Philosophiae Tyronibus Adcommodata

Augustae Vindelicorum 1790

Math.u. 224 m

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594426-9

VD18 1477691X-001